7. cvičení – Per partes + Substituce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

1. Substituce

   (a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x \,\mathrm{d}x.$

   Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x\, dx$ a platí

   $$\int \sin^5 x \cos x \, dx \to \int y^5 \, dy \overset{C}{=} \frac{y^6}{6} \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{\sin^6 x}{6}$$

   Funkce $\sin^5 x \cos x$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
   Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$.
   Funkce $f = y^5$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
   Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $\displaystyle\int -2xe^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x\, dx$ a platí

   $$\int -2xe^{-x^2} \, dx \to \int e^y \, dy \overset{C}{=} e^y \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} e^{-x^2}$$

   Funkce $-2xe^{-x^2}$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
   Pro substituci máme $\varphi = -x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $-x^2((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0]$.
   Funkce $f = e^y$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
   Závěr: $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1 + x^2)^2} \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x\, dx$ a platí

   $$\int \frac{x}{(1 + x^2)^2} \, dx \to \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y} \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{1 + x^2}$$

   Funkce $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
   Pro substituci máme $\varphi = 1 + x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [1, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \to \int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{y} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{\arcsin x}$$

Funkce $\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \arcsin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \frac{\pi}{2})$.
  Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \arcsin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, 0)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 0), (0, 1)$

2. Per partes

(a) $\displaystyle\int x \cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x \cos x\,dx = [x \sin x] - \int \sin x\,dx \overset{C}{=} x \sin x + \cos x$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce $\cos x$ a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right] - \int -e^{-x}\,dx \overset{C}{=} -x e^{-x} - e^{-x}$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{-x} a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(c) $e^x \sin x\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x\ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$2\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -e^x\cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x\cos x + e^x \sin x)$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^x, $\sin x$ a $\cos x$ jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

3. Směs

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx \to -\int \sin y\,dy \overset{C}{=} \cos y \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \cos\frac{1}{x}$$

Funkce $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ je definována na $(-\infty, 0)$ a $(0,\infty)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \frac{1}{x}$, interval $(\alpha,\beta) = (-\infty, 0)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (-\infty, 0)$.
  Funkce $f = \sin y$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \frac{1}{x}$, interval $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,\infty)$.
  Funkce $f = \sin y$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.

Závěr: $x \in (-\infty, 0), (0,\infty)$.

(b) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1\,dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x\,dx = [x\ln x] - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} x\ln x - x$$

Pracujeme na intervalu $I = (0,\infty)$, funkce $\frac{1}{x}$ a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in (0,\infty)$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x\,dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx \to \int \frac{dy}{2+y} \overset{C}{=} \ln|2+y| \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln(2+e^x)$$

Funkce $\frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,\infty)$. Funkce $f = \frac{1}{2+y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-2,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x\ln x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx \to \int \frac{1}{y}\,dy \overset{C}{=} \ln|y| \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln(|\ln(\ln x)|)$$

Funkce $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ je definována na $(1,e)$ a (e,∞), na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \log(\log x)$, interval $(\alpha,\beta) = (1,e)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (-\infty,0)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,0)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \log(\log x)$, interval $(\alpha,\beta) = (e,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,\infty)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.

Závěr: $x \in (1,e),(e,\infty)$.

(e) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1\cdot\arcsin x\,dx = [x\arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

Substituce $y = 1-x^2$, $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$.

$$-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \to \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \overset{C}{=} \sqrt{y}$$

Tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu $I = (-1,1)$, funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a 1 jsou na I spojité.
Substituce: Funkce $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1,1)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = 1-x^2$, interval $(\alpha,\beta) = (-1,1)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,1]$. Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
Závěr: $x \in (-1,1)$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{3-2x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 3-2x^2$. Potom $dy = -4x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2}\,dx \to -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4}\ln|y| \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$$

Funkce $\frac{x}{3-2x^2}$ je definována na $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = 3-2x^2$, interval $(\alpha,\beta) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (-\infty, 0)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,0)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 3-2x^2$, interval $(\alpha,\beta) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,3]$.
  Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 3-2x^2$, interval $(\alpha,\beta) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (-\infty, 0)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,0)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.

Závěr: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$.

(g) $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,\mathrm{d}x$

Řešení:
První per partes: $u' = \sin 2x$, $u = -\frac{1}{2}\cos 2x$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\right] + \int x\cos 2x =$$

Druhé per partes: $u' = \cos 2x$, $u = \frac{1}{2}\sin 2x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right] - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce $\sin 2x$, $2x$, $\cos 2x$ a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x}\cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (b \sin bx + a \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.
Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{ax}, $\sin(bx)$ a $\cos(bx)$ jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení:
Použijeme substituci $y = \operatorname{cotg} x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} dx \to -\int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} y^{3/4} \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$$

Funkce $\frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}$ je definována na $(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \cot x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

(j) $\displaystyle\int \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \overset{C}{=} \frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

Pracujeme na intervalu $I = (0, \infty)$, funkce $-\sin(\log x)\frac{1}{x}$, $\cos(\log x)\frac{1}{x}$ a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in (0, \infty)$

(k) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x^2$, pak $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$. Dostaneme

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d} \to x \int \frac{1}{-2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}2\sqrt{y} + c$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\sqrt{1-x^2} + c$$

Funkce $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 1)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = 1 - x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$.
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (-1, 1)$.

(l) $\displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\,dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

Na poslední integrál použijeme substituci $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin\,\mathrm{d}x$:

$$-\int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

tedy celkem

$$\overset{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$$

Per partes: Pracujeme na intervalech $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, funkce $\sin x$ a $\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ jsou na I_k spojité.
Původní funkce $\sin x \ln(\operatorname{tg} x)$ je definována na $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$.
Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

(m) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \to \int y\,dy \overset{C}{=} \frac{y^2}{2} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{\arctan^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \arctan x$, interval $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
Funkce $f = y$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-\infty,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(n) $\displaystyle\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \arccos x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2 \arccos x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\arccos x\right] + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

Substituce $y = 1-x^2$, odkud plyne $dy = -2x\,dx$ a $x^2 = 1-y$.

$$\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \to \frac{1}{6}\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{6}\int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{9}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^{1/2}$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu $I = (-1,1)$, funkce x^2 a $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jsou na I spojité.
Substituce: Funkce $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1,1)$ na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = 1-x^2$, interval $(\alpha,\beta) = (-1,1)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,1]$.
Funkce $f = \frac{y-1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
Závěr: $x \in (-1,1)$

(o) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx \to -\int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \overset{C}{=} 2y^{-1/2} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

Funkce $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$ je definována na $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y^3}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

(p) $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x\right] - \int \frac{4}{3}x^{1/2} \ln x \, dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{4}{3}x^{1/2}$, $u = \frac{8}{9}x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x\right] - \left[\frac{8}{9}x^{3/2} \ln x\right] + \int \frac{8}{9}x^{1/2} \, dx \overset{C}{=} \frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9}x^{3/2} \ln x + \frac{16}{27}x^{3/2}$$

Pracujeme na intervalu $I = (0, \infty)$, funkce $\sqrt{x}$, $2 \log x \cdot \frac{1}{x}$, $\frac{4}{2}\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ jsou na I spojité.
Závěr: $x \in (0, \infty)$

(q) $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln x$. Pak $dy = \frac{1}{x} \, dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx \to \int y^2 \, dy \overset{C}{=} \frac{y^3}{3} \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{\ln^3 x}{3}$$

Funkce $\frac{\ln^2 x}{x}$ je definována na $(0, \infty)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \log x$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = \mathbb{R}$.
Funkce $f = y^2$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (0, \infty)$.

(r) $\int x^3 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

Řešení:
Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x \, dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx \to \frac{1}{2} \int y e^{-y} \, dy$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \frac{1}{2}\left[-y e^{-y}\right] + \frac{1}{2} \int e^{-y} \, dy \overset{C}{=} \frac{1}{2} - y e^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y} \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Substituce: Funkce $x^3 e^{-x^2}$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$. Funkce $f = ye^{-y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Per partes: Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{-y} a 1 jsou na I spojité.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(s) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x \, dx$ a platí

$$\int \operatorname{tg} x \, dx \to \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} -\ln |y| \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\ln |\cos x|$$

Funkce $\tan x$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$.
Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Pracujeme na intervalu $x \in (0, \infty)$. Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$ a platí

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx \to 2\int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{1+y^2} \, dy \overset{C}{=} 2 \arctan y \\
&\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} 2 \arctan \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ je definována na $(0, \infty)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{x}$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$. Funkce $f = \frac{1}{1+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (0, \infty)$.

(u) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x \, dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx \to \int \frac{dy}{1 + y^2} \overset{C}{=} \arctan y \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \arctan e^x$$

Funkce $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{1+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx \to -\int \frac{dy}{1-y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

Funkce $\frac{1}{\sin x}$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (0+k\pi, \pi+k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$.
Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.

(w) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx \to \int (1-y^2)\, dy \overset{C}{=} y - \frac{y^3}{3} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

Funkce $\cos^3 x$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$.
Funkce $f = 1 - y^2$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(x) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x\, dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4}\, dx \to \frac{1}{2}\int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \overset{C}{=} \frac{1}{4}\arctan\frac{y}{2} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}$$

Funkce $\frac{x}{4+x^4}$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.
Pro substituci máme $\varphi = x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$.
Funkce $f = \frac{1}{2}\frac{1}{4+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(y) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx \to \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}}$$

pak výraz rozšíříme, abychom mohli použít substituci $t = 1+y^2$, $\mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y$:

$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y \to \int \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Nyní substituujeme $s = \sqrt{t}$, pak $\mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Nakonec použijeme tabulkový integrál:

$$\int \frac{1}{s^2-1}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|.$$

Nakonec vrátíme substituce:

$$\to -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right| \to -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}}\right| \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\left|\ln\frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}\right|$$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ je definována na $\mathbb{R}$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,\infty)$.
  Funkce $f = \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 1+y^2$, interval $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (1,\infty)$.
  Funkce $f = \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (1,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $y \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{t}$, interval $(\alpha,\beta) = (1,\infty)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (1,\infty)$.
  Funkce $f = \frac{1}{s^2-1}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (1,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $t \in (\alpha,\beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(z) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\arcsin x\right] + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

Substituce $y = \sqrt{1-x^2}$. Potom $dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a $x^2 = 1-y^2$.

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \to \int \frac{-1}{1-y^2}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{x}\arcsin x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right|$$

Per partes: Pracujeme na intervalech $I = (-1,0),(0,1)$, funkce $\frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jsou na I spojité.

Substituce: Funkce $\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1,0),(0,1)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{1-x^2}$, interval $(\alpha,\beta) = (0,1)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,1)$.
  Funkce $f = \frac{-1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{1-x^2}$, interval $(\alpha,\beta) = (-1,0)$. Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (0,1)$.
  Funkce $f = \frac{-1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$.

Závěr: $x \in (-1,0),(0,1)$

4. (a) $\displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x$

Řešení:
Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1\cdot\arctan x\,dx = [x\arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Substituce $y = 1+x^2$.

$$-\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log|y| \to -\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Tedy dohromady

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx \to \int \frac{dy}{1-y^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

Funkce $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ je definována na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha,\beta) = (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha,\beta)) = (-1,1)$.
Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \to \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} \log|y| \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \ln|\sin x|$$

Funkce $\cot x$ je definována na $(0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha,\beta) = (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha,\beta)) = (0,1]$ (nebo $[-1,0)$).
Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$ (nebo $(-\infty,0)$). Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\displaystyle\int x \log\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \log\frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{2}{1-x^2}$.

$$\int x\log\frac{1+x}{1-x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log\frac{1+x}{1-x} - \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2\log\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$x \in (-1,1)$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx \to \int\frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2}y^{2/3}$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$$

Funkce $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$ je definována na $(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{5\pi}{4}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x - \cos x$, interval $(\alpha,\beta) = (\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{5\pi}{4}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $(\sin - \cos)((\alpha,\beta)) = (0,\sqrt{2})$ pro sudá k a Platí $(\sin-\cos)((\alpha,\beta)) = (-\sqrt{2},0)$ pro lichá k.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ má primitivní funkci na intervalech $(a,b) = (0,\infty)$ (ten vezmeme pro sudá k) nebo na $(a,b) = (-\infty, 0)$ (ten pro lichá k). Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(Není potřeba najít přesně interval $(0, \sqrt{2})$, důležité je jen ověřit vztah $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$.)

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} \to 2\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \overset{C}{=} 2\arcsin y$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2\arcsin\sqrt{x}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(0,1)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.
Položme $\varphi = \sqrt{x}$ a $(\alpha,\beta) = (0,1)$. Pak $\sqrt{((0,1))} = (0,1)$.
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(-1,1)$. Protože $\sqrt{((\alpha,\beta))} \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0,1)$.

(g) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:
První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right] + \int x e^{-2x}\,dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}$$

$x \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\, \cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin x}\cos x\,dx$$

$$\to \int \frac{1-y^2}{y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int y\,dy \overset{C}{=} \log|y| - \frac{y^2}{2} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\cos^3}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).
Funkce $f = \frac{1-y^2}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \to \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{1}{1-y^2}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}\right|$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(0, \infty)$ a $(-\infty, 0)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{x\sqrt{(1+x^2)}}$.
Položme $\varphi = \sqrt{x^2+1}$ a $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$ (v obou případech).
Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(1, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, \infty)$ i pro $x \in (-\infty, 0)$.

(j) $\displaystyle\int x \arctan x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x \arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x$$

$x \in \mathbb{R}$

(k) $\displaystyle\int \log(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,dx = \left[x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \overset{C}{=}$$

$$x \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1 + x^2$.
$x \in \mathbb{R}$

(l) $\int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\log x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\log x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\log x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\log x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \sin(\log x) \overset{C}{=} x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\log x) \overset{C}{=} \frac{1}{2} x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

$x \in (0, \infty)$

(m) $\int x^n \log x\,\mathrm{d}x$, $n \neq -1$

Řešení:
Položme $u' = x^n$, $v = \log x$. Potom $u = x^{n+1}/n + 1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\, dx \overset{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$x \in (0, \infty)$

(n) $\int e^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} 1$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.
$x \in \mathbb{R}$