7. cvičení – Per partes + Substituce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť f je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu I. Potom f má na I primitivní funkci.

Věta 2 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 3 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 4. Objevuje se i v podobě:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 5. Nechť $P(x)$ značí polynom. V následujících tabulkách je pak nápověda, jak zvolit v per partes. (Jako každá nápověda, funguje to často, ale ne nutně vždycky.)

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan(kx)$	$\arctan(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arccot}(kx)$	$\operatorname{arccot}(kx)$	$P(x)$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

1. Substituce

   (a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle\int -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

2. Per partes

(a) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

3. Směs

(a) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{x}{3-2x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}\,\mathrm{d}x$

(j)♡ $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(l)❄ $\int \sin x\ln(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$

(m) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(n) $\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x$

(o) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$

(p)✿ $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

(q) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

(r)❆ $\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(s)❇ $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

(t)✤ $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(u)❋ $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(v)❀ $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(w)★ $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

(x)❃ $\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$

(y)❁ $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

(z)♣ $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Na bonusové cviko ve čtvrtek

(a) $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$

(b) ♡ $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

(c) ❄ $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$

(f) ✤ $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(i) ❀ $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

(k) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

(l) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(m) $\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x$, $n\neq -1$

(n) $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

(3j) per partes s 1
(3l) per partes
(3p) per partes
(3r) substituce $y=x^2$
(3s) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, substituce $y=\cos x$
(3t) substituce $y=\sqrt{x}$
(3u) substituce $y=e^x$
(3v) $\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$, substituce $y=\cos x$
(3w) $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$, substituce $y=\cos x$
(3x) substituce $y=x^2$
(3y) substituce $y=e^x$
(3z) per partes
(4b) $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ (4c) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$
(4f) $y=\sqrt{x}$
(4h) $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)$
(4i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$