



6. cvičení – Primitivní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I* , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu). Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu). Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .

Poznámka 4. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f .

Hinty

$$\begin{array}{ll} x^{-a} = \frac{1}{x^a} & \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} & a^b = e^{b \ln a} \\ & a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{array}$$

Příklady

1. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = x^{13} & \text{(h)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2 \\ \text{(b)} f(x) = \sqrt{x} & \text{(i)} f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{1}{x^3} & \text{(j)} f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} \\ \text{(d)} f(x) = \frac{1}{x} & \text{(k)} f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x) \\ \text{(e)} f(x) = (1 + \sin x + \cos x) & \text{(l)} f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\ \text{(f)} f(x) = 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} & \\ \text{(g)} f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - e^x & \end{array}$$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $(\frac{1}{a}F(ax+b) + C)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

3. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \cos(3x) & \text{(d)} f(x) = \frac{1}{1+4x^2} \\ \text{(b)} f(x) = \sin(2x - \pi) & \text{(e)} f(x) = \frac{1}{1-4x} \\ \text{(c)} f(x) = e^{5-3x} & \end{array}$$

- (f) $f(x) = (2x + 1)^7$
 (g) $f(x) = e^{3x} + \frac{7}{x}$
 (h) $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$
 (i) $f(x) = (3 - x^2)^3$
 (j) $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$
 (k) $f(x) = \frac{1}{x-2} + (3x+7)^5$
 (l) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$
 (m) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}}$
 (n) $f(x) = \frac{1}{x+A}$

4. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

- (a) $\ast f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x}$
 (b) $\clubsuit f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}}$
 (c) $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$
 (d) $\heartsuit f(x) = \tan^2 x$
 (e) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$
 (f) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$
 (g) $f(x) = (2^x + 3^x)^2$
 (h) $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$
 (i) $f(x) = \cotg^2 x$
 (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$
 (k) $f(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right), a \in \mathbb{R}$

5. Najděte takovou funkci, aby $f'(x) = 6x(1 - x)$ a $f(0) = 1$.

6. Najděte chyby

- (a) $\int x^2 e^x dx = \frac{1}{3} x^3 e^x + c$
 (b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + c$

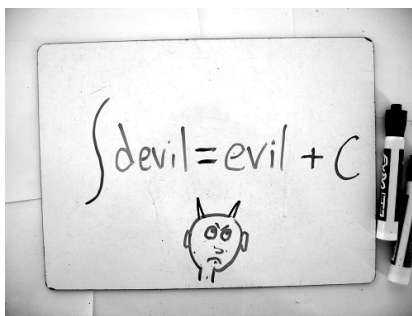


Figure 1: <https://mathwithbaddrawings.com/2013/05/27/calculus-joke/>

$$\frac{x \frac{\cos}{x} \frac{\cos}{1-\cos}}{\frac{\cos}{x} \frac{\cos}{1-\cos}} = \frac{x \frac{\cos}{x} \frac{\cos}{\sin}}{\frac{\cos}{x} \frac{\cos}{\sin}} = x \frac{\cos}{\sin} \text{ (pf)}$$

$$\left(\frac{2}{1-x^2} - 1 \right) \frac{1}{2} = \frac{2(1-x^2) - 1}{2} \text{ (qf)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} (1-x^2) = 1 - x^2 \text{ (ef)}$$