



5. cvičení – Opakování

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus:

1. Mrkneme, jestli řada splňuje **nutnou podmínku**.
2. Vyšetříme **absolutní konvergenci** $\sum |a_n|$.

(a) SK, LSK,

(b) Cauchy, d'Alembert.

Pokud řada **nestřídá znaménka**, jsme hotovi, protože absolutní a neabsolutní konvergence splývá.

3. Pokud řada **střídá znaménka**, ale $\sum |a_n|$ **konverguje**, tak konverguje i $\sum a_n$.
4. Konečně pokud řada **střídá znaménka**, ale $\sum |a_n|$ **diverguje**, vyšetříme ještě $\sum a_n$.

(a) Leibniz,

(b) Dirichlet,

(c) Abel.

5. Napíšeme **závěr**.

Příklady

1. Následující příklady i s řešením jsou od prof. Picka: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

Vyšetřete konvergenci řad (stačí konvergence, absolutní konvergenci nemusíte):

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \arccos \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) + 1} \right)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), x \in \mathbb{R}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos \left(1 - \frac{1}{n} \right), x \in \mathbb{R}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right), x \in \mathbb{R}$$

2. Následující příklady jsou od prof. Hencla: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/edu.php>

Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{n^a}$$

i. pro $a = 2$,

ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{3^n + 1} - \sqrt[3]{3^n - 1}$$

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{(n^2)}}$
 i. pro $a = 2$,
 ii. v závislosti na parametru $a > 0$.
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}} - \sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}}}{\sqrt{n}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan a)^n}{n + \sqrt{n}}$,
 i. pro $a = 1$,
 ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Bonus

3. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

- (a) $\sum a_n$ konverguje. (c) $\sum |a_n|$ konverguje.
 (b) $\sum (-1)^n a_n$ konverguje. (d) $\sum a_n^2$ konverguje.

4. ♡ Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$. (c) $\sum a_n$ konverguje.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$. (d) $\sum |a_n|$ konverguje.