4. cvičení – Neabsolutní konvergence

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leibniz)**.** Nechť $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim b_n = 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

(Pokud $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tak řada nesplňuje NP a diverguje.)

Věta 2 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,

(D) $\lim b_n = 0$ a **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **omezená**.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Poznámka 3. Kritéria se vyskytují i v jiných verzích:

- Abelovo kritérium 2
  Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť navíc posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Fakta

První fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale mají stejně omezené částečné součty pro:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Druhý fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Hinty

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$2\sin^2 k = 1 - \cos 2k, \qquad 2\cos^2 k = 1 + \cos 2k$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Poznámka 4. Algoritmus:

1. Rychle zkoukneme, jestli řada splňuje **nutnou podmínku**.
2. Odhadneme, jestli by nemohla být **absolutně konvergentní**. Pokud ano, testujeme $\sum |a_n|$ kritérii pro nezáporné řady. Neabsolutní konvergence pak vyplyne.
3. Na AK to nevypadá, tedy:
   (a) Je to $(-1)^n b_n$, kde b_n jde k 0 monotónně? $\to$ **Leibniz**. **Monotonii** poctivě ověříme:
      i. Jak vypadá $b_{n+1} - b_n$ nebo b_{n+1}/b_n?
      ii. Převedeme b_n na funkci a zderivujeme - zjistíme, kde roste a klesá.
   (b) Je tam $\sin nx$ nebo $\cos nx$ krát b_n, která jde **monotónně** k 0? Dirichlet. Poctivě ověříme monotonii (jako u Leibnize).
   (c) Je tam konvergující řada krát něco **omezeného**? Zkusíme Abela. Opět ověříme **monotonii**.
4. Kritéria jde i **kombinovat**. Je tam $\sin nx$ krát něco jdoucí k 0 krát něco omezeného? Dirichlet a pak slepit Abelem. A pořád ověřujeme podmínky.
5. **Varování**: Víme, že $\sum \sin(nx)$ a $\sum \cos(nx)$ má omezené částečné součty. O výrazech $\sin^2 n$, $\cos(n+2)$ nebo $\sin n^2$ nevíme nic a musíme je prve upravit.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

2. Určete, zda následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\log n}$

(c)❄ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$

(f)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$

(g)✻ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Rozhodněte o **neabsolutní i absolutní konvergenci** následujících řad (v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

(d)✽ $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2\pi)\left(\sqrt{n+9}-\sqrt{n}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

Zkouškové příklady

Následující příklady i s řešením jsou od doc. Rokyty: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html

4. Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad. (Není-li napsáno jen NAK.)

(a)✿ NAK $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}\cos(3n+2)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}\left(\ln\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(d)❄ NAK $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n\sin 2n$

(e)✽ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!+2}$

(f)★ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}$

(g)❀ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^n+1}\sin(n\sqrt{\pi})$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$

(i)♡ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$

Bonus

5.❁ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin n}{n^2+1}$

6. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, $k, l \in \mathbb{R}$, K
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K

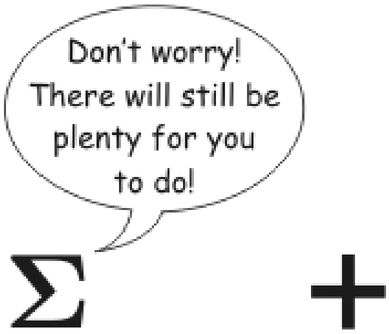

Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2010/09/09/a-nice-and-funny-note/

(2c) $\arctan n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} n$
(2f) $2 \sin^2 n = 1 - \cos 2n$
(2g) Užijte součtové vzorce pro $\sin(a+b)$ (2h) Vyřešte prve $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{n}$
(3d) Rozepište prvních pár členů $\cos(n^2 \pi)$.

(4a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
(4d) Dirichlet, monotonii ukážeme přes derivaci - její nulový bod nehledáme - prozkoumáme druhou derivaci a $\lim_{x \to \infty} f'$.
(4e) LSK s $\frac{1}{n^2}$
(4f) rozepište kombinační čísla, pak LSK s $\frac{1}{n^2}$
(4g) Dirichlet, monotonie: zkoumejte $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
(4i) Cauchy

(5) Rozepište na $(-1)^n \frac{\sin n}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2+1}$, použijte Abela. Ke konvergenci $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ užijte Dirichleta a roztržení na sudé a liché členy.