3. cvičení – Taylor v řadách

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Algoritmus

Snažíme se uhodnout posloupnost b_n, kterou použijeme do LSK:

1. **Najdeme x_n a funkci $f(x)$** tak, že složením $f(x_n)$ dostaneme a_n. (Např. pro $a_n = \sin\frac{1}{n}$ budeme mít $f(x) = \sin x$, $x_n = \frac{1}{n}$.)
2. **Zkontrolujeme**, že x_n jde do 0.
3. Rozvineme $f(x)$ do **Taylora**. (Stupeň musíme odhadnout, ale musí tam zbýt nějaká x, nejen óčka.)
4. Proměnnou x v Taylorovi nahradíme zpátky x_n, tím **získáme** b_n pro LSK.
5. Provedeme **LSK**. Nezapomeneme použít Heineho, Taylora příp. Větu výše.
6. Uděláme **závěr**.
7. **Varování**: některé funkce je potřeba před rozvinutím do Taylora upravit, abychom rozvíjeli v 0.
8. Pozn.: Rozvíjet lze samozřejmě i v jiných bodech. Jen musíme poctivě ověřovat podmínky.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

   (d) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^{\beta}} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^{\beta}}\right)$, $\beta > 0$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   (f) ✾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

   (g) ❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{p}$, $p \in \mathbb{R}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Teorie

2. Dokažte, nebo najděte protipříklad.
   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.
   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.
   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.
3. Dokažte nebo najděte protipříklad
   (a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je absolutně konvergentní.
   (b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Nechť navíc $|a_n - b_n| \leq c_n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a b_n je omezená posloupnost. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.
4. ❄ Najděte posloupnost a_n, pro niž $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a pro každé $\alpha \geq 1$ je
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha} = \infty.$$
5. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
6. ❀ Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $|a_n| \geq |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
7. ♣ Najděte konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
8. Najděte posloupnosti a_n a b_n tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je divergentní, ale přitom a_n a b_n splňují vždy dvě ze tří následujících podmínek:
   (a) $a_n = (-1)^n$,
   (b) $b_{n+1} \leq b_n$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(1d) $\ln a - \ln b = \ln a/b = -\ln b/a$.
(1f) $\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{2}{n}}$.
(1g) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}\right)$.
(4) $1/\ln n$
(6) uvažujte neabsolutně konvergentní řady
(7) $(-1)^n/\sqrt{n}$, $(-1)^n/\sqrt{n} + \frac{1}{n}$