



2. cvičení – Srovnávací a Limitní srovnávací kritérium

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium). Nechtě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechtě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium). Nechtě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechtě existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

- Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.
- Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 3 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady). Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Věta 4 (Heineova). Nechtě $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechtě funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a . Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$

- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Fakta

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
- Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou*. Harmonická řada diverguje.
- Řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Poznámka 5. Algoritmus:

1. **NP**: Jde a_n k 0? Pokud ne, řada diverguje. (Pokud ano, nevíme nic.)
2. Má řada **nezáporné** členy? Pokud ne, zkusíme absolutní konvergenci (z ní vyplyne i konvergence).
3. Zkusíme najít řadu k **LSK**. (Častí kandidáti: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$.)
 - (a) **Zlomek**: Vytkneme nejsilnější člen v čitateli i jmenovateli - s tím srovnáme.
 - (b) **Odmocniny**: Není potřeba je nejdřív upravit?
 - (c) **Funkce**: K čemu se blíží jejich argument? Neznáme nějakou limitu v tomto bodě?
- Limita nám poradí, s čím srovnávat.
4. Umíme použít nějaký odhad zdola či shora? (např. $|\cos x| \leq 1$, $|\sin n| \leq n$, $\ln(x) \leq x-1$). Aplikujeme **SK**. (Pozor, je třeba odhadovat *zdola divergentní* a *shora konvergentní* řadou.)
5. Ještě jednou prokontrolujeme všechny implikace a **podmínky**. Napíšeme závěr.
6. **Varování**: je velký rozdíl mezi $\sin n$ a $\sin \frac{1}{n}$.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + 1/n)^n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2n}{n^2 + 2n^3}$$

$$(g) \clubsuit \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

$$(h) \heartsuit \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln n}$$

Zkouškové příklady jsou: (2b, c, g, l, m, n)

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2n}{1+n^2}$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2nx}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1)$, $a \in \mathbb{R}$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{(n^2+1)^{-1}} - 1\right)$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$
 (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos \frac{1}{n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$
 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$

Bonus

3. Zkonstruujte kladnou posloupnost a_n tak, že

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
 (c) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

4. Doplňte symboly \Leftrightarrow , \Leftarrow nebo \Rightarrow .

Věta 6 (limitní srovnávací kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a necht' existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

$K \in (0, \infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje
$K = 0$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje
$K = \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje

(1) (4) KS s/1
 (1) (8) u ≤ u



Figure 1: <https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load>