



1. cvičení – Řady - NP, Cauchy, d'Alembert

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim a_n = 0$.

Věta 2 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3 (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Věta 5. Nechť a_n je **kladná** posloupnost. Nechť navíc existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak existuje i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Definice 6. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 7. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Algoritmus:

1. Zkontrolujeme, že má řada **nezáporné členy**. Jinak vyšetřujeme absolutní konvergenci.
2. Vybereme si **d'Alembertovo** nebo **Cauchyovo** kritérium a spočteme příslušnou limitu.

- (a) Obvykle nezáleží, které kritérium zvolíme. Výjimkou je situace, kdy řada obsahuje nulové členy - pak musíme zvolit Cauchyho. Druhou výjimkou je případ, $\limsup > 1$, který se vyskytuje pouze u Cauchyho.
- (b) Může se stát, že limita neexistuje, pak zkusíme variantu s \limsup či nalezením q .
3. Podle limity (< 1 nebo > 1) uděláme závěr: Konverguje nebo Diverguje.
4. **Varování:** Pokud limita vyjde rovna 1, nevíme nic. Navíc pokud vyšla 1 v odmocninovém kritériu, vyjde 1 i v podílovém a naopak. Bude pak potřeba zvolit nějaké úplně jiné (nejspíš **nutnou podmínku** nebo (limitní) srovnávací).

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Nechť $\alpha > 0$, pak:

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \qquad 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \qquad 4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1} \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^n & \text{(k)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)} \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{7}\right)^n & \text{(h)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} & \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \end{array}$$

2. Vyšetřete konvergenci, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$$

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n} & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)} \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} z^n, \quad z \in \mathbb{R}. \end{array}$$