



bonusové. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu - opakování

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Zkouškové příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{(x^2 - 1)(\log x)^{\alpha}}{x^3} dx$$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1: funkci $\log x$ srovnáme s $(x - 1)$. Funkci $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ srovnáváme s $(x - 1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x - 1)(x - 1)^{\alpha}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{(x^2 - 1)(\log x)^{\alpha}}{x^3}}{(x - 1)(x - 1)^{\alpha}} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x + 1)}{x^3} \cdot \frac{\log^{\alpha} x}{(x - 1)^{\alpha}} = 2 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 (x - 1)^{1+\alpha} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha + 1 > -1$, tedy když $\alpha > -2$. (Lze přímo spočítat.)

- u ∞ : funkci $x^2 - 1$ srovnáváme s x^2 . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x^2 \log^{\alpha} x}{x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x^2 - 1)(\log x)^{\alpha}}{x^3}}{\frac{x^2 \log^{\alpha} x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^{\infty} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^{\infty} \frac{\log^{\alpha} x}{x} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ (lze spočítat substitucí $y = \log x$).

Závěr: $\int_1^{\infty} f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-2, -1)$.

$$(b) \int_0^1 \frac{(e^{1-x} - 1)^{\alpha} \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}} dx$$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, 1)$.
- u 0: funkci $\arcsin(x)$, budeme ho srovnávat s x . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{(e^{1-x} - 1)^{\alpha} \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = (e - 1)^{\alpha} \frac{\pi}{2} \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, který konverguje.

- u 1: funkci $(e^{1-x}-1)$ srovnáváme s $1-x$. Funkci $\arccos x$ srovnáváme s $\sqrt{1-x}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1-x)^\alpha \sqrt{1-x}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{(1-x)^\alpha \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^\alpha \sqrt{1-x} dx$.

Tedy právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, což je právě pro $\alpha + \frac{1}{2} > -1$, tedy pro $\alpha > -\frac{3}{2}$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{3}{2}$.

(c) $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha dx$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1: $\log x$, budeme ho srovnávat s $(x-1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$. Máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{x-1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log x}{(x-1)} (\operatorname{arccot} x)^\alpha \\ &= (\operatorname{arccot} 1)^\alpha \in (0, \infty), \end{aligned}$$

tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$, který konverguje (lze přímo spočítat).

- u ∞ : funkci $\operatorname{arccot} x$ budeme srovnávat s $\frac{1}{x}$. Funkci $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x \operatorname{arccot} x)^\alpha = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty (\log x) x^{-\frac{3}{2}-\alpha} dx$, který konverguje právě tehdy, když $-\frac{3}{2}-\alpha < -1$, tedy právě pro $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{1}{2}$.

- (d) Ukažte, že funkce $x - \sin x$ je kladná na $(0, \infty)$ a vyšetřete konvergenci

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x} dx$$

Řešení:

- Uvažujme funkci $h(x) = x - \sin x$. Pak $h(0) = 0$ a $h'(x) = 1 - \cos x$ na $x \in (0, \infty)$. Pak $h' \geq 0$ na $(0, \infty)$. Speciálně je $h' > 0$ na $(0, 2\pi)$. Tedy h je rostoucí na $[0, 2\pi]$. Navíc h neklesá na $[2\pi, \infty)$. Tedy $h > 0$ na $(0, \infty)$.

- funkce f je spojitá na $(0, \infty)$.
- funkci $h = x - \sin x$ lze rozvinout jako $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- u 0: budeme srovnávat $\log(x - \sin x)$ s $\log x^3 = 3 \log x$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{3 \log^2 x}{1}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}}{3 \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(x - \sin x)}{3 \log x} \cdot (x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x) = 1 \cdot 10 = 10 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 3 \log^2 x \, dx$, který konverguje (nutno ukázat).

Limitu jsme spočetli jako

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(x - \sin x)}{3 \log x} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1 - \cos x}{x - \sin x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x - \sin x} = 1$$

- u ∞ : budeme srovnávat $\log(x - \sin x)$ s $\log x$. Funkci $x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x$ srovnáváme s $x^{\frac{6}{5}}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}}{\frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x - \sin x)}{\log x} \cdot \frac{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}{x^{\frac{6}{5}}} = 1 \in (0, \infty)$$

tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty \frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}} \, dx$, který konverguje (nutno ukázat).

Limitu jsme spočetli jako

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x - \sin x)}{\log x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x (1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + \log(1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\log(1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} \stackrel{VOAL}{=} 1 + \frac{0}{\infty} = 1 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje.

(e) $\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, 1)$.
- funkci $\arcsin x - x$ lze rozvinout jako $\arcsin x - x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- u 0: budeme srovnávat $\arcsin x - x$ s x^3 . Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s πx . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x^3)^\alpha (\pi x)^\beta$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x^3)^\alpha (\pi x)^\beta} = \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha \cdot 1 \cdot 1 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \pi^\beta x^{3\alpha+\beta} \, dx$, který konverguje právě tehdy, když $3\alpha + \beta > -1$.

- u 1: Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s $1 - x$. Plyne z grafu nebo z Taylorova rozvoje funkce $\sin(\pi x)$ v bodě 1. Funkci $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ srovnáváme s $1 - x$. (Opět z grafu nebo z Taylora v 1.)

Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1 - x)^\beta(1 - x)^\alpha$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1 - x)^\beta(1 - x)^\alpha} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^\alpha \pi^\beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)^{\alpha+\beta} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$ (lze převést substitucí $y = 1 - x$ na známý integrál).

Limity jsme spočetli jako

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sin(\pi x)}{(1 - x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\pi \cos(\pi x)}{-1} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1 - x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-1} = \frac{\pi}{2}$$

Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když $(\alpha + \beta > -1 \ \& \ 3\alpha + \beta > -1)$.

2. Vyšetřete **konvergenci** integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Příklady i s řešením jsou přímo opsány od: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

$$(a) \int_0^\infty \frac{\arctan(x^2)}{x^a} \sin(2x) \, dx, \quad a > 0$$

Řešení:

Označme

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan x^2}{x^a} \sin(2x) \, dx = I_0 + I_\infty,$$

kde

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^a} \sin(2x) \, dx, \quad I_\infty = \int_1^\infty \frac{\arctan x^2}{x^a} \sin(2x) \, dx.$$

- Chování u nuly:

Funkce $f(x) = \frac{\arctan x^2}{x^a} \sin(2x) \in C((0, 1])$ a $f(x) > 0$ pro $x \in (0, 1]$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{x^a} \sin(2x) \cdot \frac{1}{x^{3-a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x^2}{x^2} \right) \cdot x^2 \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right) \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^{3-a}} = 2.$$

Tato limita je nenulová a konečná, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje I_0 právě tehdy, když konverguje

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}} \, dx,$$

což se stane právě tehdy, když $a - 3 < 1$, tedy $a < 4$.

- Chování v nekonečnu:

Funkce $\sin(2x)$ má na $(1, \infty)$ omezenou primitivní funkci (např. $-\frac{1}{2} \cos(2x)$), a výraz $\frac{\arctan x^2}{x^a} \in C([1, \infty))$. Podle Dirichletova kritéria postačí:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x^2}{x^a} = 0$: Platí, neboť $|\arctan x^2| \leq \frac{\pi}{2}$, takže

$$\left| \frac{\arctan x^2}{x^a} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^a} \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow \infty \text{ a } a > 0.$$

- (ii) Funkce $g(x) = \frac{\arctan x^2}{x^a}$ je na dostatečně velkém intervalu klesající: Její derivace:

$$g'(x) = \frac{x^4}{(1+x^4)x^{a+1}} \left[\frac{2}{x^2} - a \cdot \arctan x^2 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right) \right].$$

Pro $x \rightarrow \infty$, výraz v hranaté závorce jde k $-a \cdot \frac{\pi}{2}$, což je záporné. Tedy $g'(x) < 0$ pro x dost velké.

Závěr: Integrál konverguje právě když $a \in (0, 4)$.

(b) $\int_0^\infty \frac{(\arctan x)^a \sin x}{(2x+1)} dx$

Řešení: Označíme

$$I := \int_0^\infty \frac{(\arctan x)^a \sin x}{2x+1} dx, \quad I_1 := \int_0^1 \frac{(\arctan x)^a \sin x}{2x+1} dx, \quad I_\infty := \int_1^\infty \frac{(\arctan x)^a \sin x}{2x+1} dx.$$

- Pro vyšetření chování integrálu I_1 použijeme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^a \sin x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x^{a+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^a \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2x+1} = 1.$$

Proto I_1 konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě tehdy, když konverguje

$$\int_0^1 x^{a+1} dx,$$

což je právě tehdy, když $a > -2$.

- Pro vyšetření chování integrálu I_∞ použijeme následující úvahu: protože $(\arctan x)^a$ je na $(1, +\infty)$ monotónní a omezená funkce pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ (ukážete to podrobně), bude podle Abelova kritéria stačit, když bude konvergovat integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x+1} dx.$$

Tento integrál konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\sin x$ má na $(1, +\infty)$ omezenou primitivní funkci a $\frac{1}{2x+1}$ jde monotónně k nule pro $x \rightarrow +\infty$.

Závěr: I konverguje právě tehdy, když $a > -2$.

(c) $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha x \cdot \sin^\beta x dx$

Řešení:

Zkoumejme konvergenci integrálu:

$$\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha x \cdot \sin^\beta x \, dx.$$

Integrand $f(x) = \tan^\alpha x \cdot \sin^\beta x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Integrál tedy konverguje právě tehdy, když konvergují integrály

$$\int_0^{\pi/4} f(x) \, dx \quad \text{a} \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) \, dx.$$

- Chování u nuly:

Pro srovnání použijeme funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$, která je kladná a spojitá na $(0, \pi/4]$. Platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

a tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje

$$\int_0^{\pi/4} f(x) \, dx \quad \text{právě tehdy, když konverguje} \quad \int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta} \, dx.$$

Ten konverguje právě když $\alpha + \beta > -1$.

- Chování u $\pi/2$:

Pro srovnání použijeme funkci $g(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\alpha}$, která je kladná a spojitá na $[\pi/4, \pi/2)$. Platí:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

a tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) \, dx \quad \text{právě tehdy, když konverguje} \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\alpha} \, dx.$$

Ten konverguje právě když $-\alpha > -1$, tedy $\alpha < 1$.

Závěr: Integrál

$$\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha x \cdot \sin^\beta x \, dx$$

konverguje právě tehdy, když platí:

$$\alpha + \beta > -1 \quad \text{a} \quad \alpha < 1.$$

(d) $\int_0^\pi \frac{\log^\alpha(1+x) \sin^\beta(x)}{x^2(\pi-x)^3} \, dx$

Řešení:

Zkoumejme konvergenci integrálu:

$$\int_0^\pi \frac{\log^\alpha(1+x) \cdot \sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3} \, dx.$$

Označme

$$f(x) = \frac{\log^\alpha(1+x) \cdot \sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}, \quad x \in (0, \pi).$$

Funkce f je na intervalu $(0, \pi)$ kladná a spojitá, a proto stačí vyšetřit její chování v krajních bodech.

- Bod 0:
Položme

$$g(x) = \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2} = x^{\alpha+\beta-2}.$$

Funkce g je na intervalu $(0, 1]$ kladná a spojitá. Výpočet ukazuje:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pi^{-3} \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria konverguje

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{právě tehdy, když konverguje} \quad \int_0^1 g(x) dx,$$

což nastává právě tehdy, když $\alpha + \beta > 1$.

- Bod π :
Položme

$$g(x) = (\pi - x)^{-3} \cdot (\pi - x)^\beta = (\pi - x)^{-3+\beta}.$$

Funkce g je kladná a spojitá na intervalu $[1, \pi)$, a platí

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria konverguje

$$\int_1^\pi f(x) dx \quad \text{právě tehdy, když konverguje} \quad \int_1^\pi g(x) dx,$$

což nastává právě tehdy, když $\beta > 2$.

Závěr: Integrál

$$\int_0^\pi \frac{\log^\alpha(1+x) \cdot \sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3} dx$$

konverguje právě tehdy, když

$$\alpha + \beta > 1 \quad \text{a} \quad \beta > 2.$$

(e) $\int_0^1 \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha} dx$

Řešení:

Zkoumejme konvergenci integrálu:

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \cdot \sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha} dx.$$

Označme:

$$f(x) = \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \cdot \sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha}, \quad x \in (0, 1).$$

Funkce f je na intervalu $(0, 1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

- Bod 0:
Položme

$$g(x) = x^{3\alpha}(\pi x)^\beta = \pi^\beta x^{3\alpha+\beta}.$$

Funkce g je na intervalu $(0, \frac{1}{2}]$ kladná a spojitá. Výpočet ukazuje:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy

$$\int_0^{1/2} f(x) dx \quad \text{konverguje právě tehdy, když konverguje} \quad \int_0^{1/2} g(x) dx,$$

což nastává právě tehdy, když $3\alpha + \beta > -1$.

- Bod 1:
Položme

$$g(x) = (1-x)^{-\alpha} \cdot (1-x)^\beta = (1-x)^{\beta-\alpha}.$$

Funkce g je kladná a spojitá na intervalu $[\frac{1}{2}, 1)$, a platí:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria

$$\int_{1/2}^1 f(x) dx \quad \text{konverguje právě tehdy, když konverguje} \quad \int_{1/2}^1 g(x) dx,$$

což se stane právě tehdy, když $\beta - \alpha > -1$, tj. $\alpha - \beta < 1$.

Závěr: Integrál

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \cdot \sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha} dx$$

konverguje právě tehdy, když

$$3\alpha + \beta > -1 \quad \text{a} \quad \alpha - \beta < 1.$$