



## 19. cvičení – Limity

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie – definice a věty

**Definice 1.** Necht  $(X, \rho)$  a  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory,  $f : X \rightarrow Y$  je zobrazení,  $M \subset X$  a  $a \in X$  je hromadným bodem množiny  $M$ . Řekneme, že prvek  $b \in Y$  je *limitou zobrazení  $f$  v bodě  $a$  vzhledem k množině  $M$* , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M, x \neq a : \rho(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

**Věta 2** (Heine). Necht  $(X, \rho)$ ,  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $M \subset X$ ,  $a \in M'$ ,  $b \in Y$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost  $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$  platí

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow b.$$

**Věta 3** (Aritmetika limit). Necht  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset X$ ,  $a \in M'$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Necht  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = \alpha$  a  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} g(x) = \beta$ . Pak

1.  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2.  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3.  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$ , pokud  $\beta \neq 0$ .

**Věta 4** (O limitě složeného zobrazení). Necht  $(X, \rho)$ ,  $(Y, \sigma)$  a  $(Z, \tau)$  jsou metrické prostory,  $g : X \rightarrow Y$ ,  $f : Y \rightarrow Z$ . Necht  $A \subset X$ ,  $a \in A'$ ,  $B \subset Y$ ,  $b \in B'$ ,  $c \in Z$  a necht platí:

1.  $\exists \delta > 0 : g(P(a, \delta) \cap A) \subset B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = b$
3.  $\lim_{y \rightarrow b, y \in B} f(y) = c$

Necht platí jedna z podmínek

- (P)  $\exists \eta > 0 : b \notin g((P(a, \eta) \cap A))$   
(S) zobrazení  $f$  je spojitě v bodě  $b$  vzhledem k  $B$ .

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(g(x)) = c.$$

**Věta 5** (2 policažti). Necht existuje prstencové okolí  $P(x_0, y_0)$  takové, že na  $P(x_0, y_0)$  platí

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y).$$

Necht dále

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} h(x, y) = L = \lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} g(x, y),$$

$L \in \mathbb{R}$ . Pak také existuje

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = L.$$

**Věta 6** (Omezená a mizející). Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a$  buď hromadným bodem množiny  $M$ . Necht'  $f$  je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^n$  a množiny  $M$  a necht'

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x)g(x) = 0.$$

**Poznámka 7** (O dvojnásobné limitě). Pokud existují limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = L_1$  a  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = L_2$  a  $L_1 \neq L_2$ , tak limita  $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y)$  neexistuje. (Opačné tvrzení neplatí.)

**Poznámka 8** (O dvojnásobné limitě 2). Pokud existují limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = L_1$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = L_2$  a  $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = L$ , pak  $L = L_1 = L_2$ .

**Věta 9** (O absolutní hodnotě). 1. Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in \mathbb{R}^n$  buď hromadným bodem množiny  $M$ . Jestliže

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L, \quad \text{potom} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in \mathbb{R}^n$  buď hromadným bodem množiny  $M$ . Potom

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = 0, \quad \text{právě když} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} |f(x)| = 0.$$

## Shrnutí – Co máme k dispozici:

1. Je funkce v daném bodě spojitá?  $\rightarrow$  Lze **dosadit**.
2. Jde o polynom  $0/0$ ?  $\rightarrow$  Možná půjde něco **vytknout** a pokrátit.
3. Jsou tam odmocniny?  $\rightarrow$  Zkusme použít **vzor**ce, např.  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ .
4. Vypadá to na známou limitu?  $\rightarrow$  **VOLSF**.
5. Je tam omezená ( $\sin, \cos, \dots$ ) krát nulová?  $\rightarrow$  Věta o **omezené a mizející**.
6. Dvojnásobné limity existují, ale jsou různé?  $\rightarrow$  Limita **neexistuje**.
7. Limity po přímkách  $y = kx$  vyjdou různé?  $\rightarrow$  Limita **neexistuje**.
8. Limity po dalších křivkách ( $y = kx^2, y = kx^3, \dots$ ) vyjdou různé?  $\rightarrow$  Limita **neexistuje**.
9. Vyskytuje se tam hodně  $x^2 + y^2$ ?  $\rightarrow$  Možná to půjde z **definice**. Jestliže  $x^2 + y^2 < \delta$ , jak vypadá  $f(x, y)$ ?
10. Nelze použít nějaký odhad?  $\rightarrow$  **Dva policajti**.

## Algoritmus:

1. První pohled na funkci:
  - (a) Je **spojitá**?
  - (b) Vypadá to na **známou limitu**?
  - (c) Nemá různé **dvojnásobné limity**?
  - (d) Jak to dopadne na **přímkách**  $y = kx$ ?
  - (e) Je tam **omezená** funkce?
  - (f) Jsou tam **odmocniny**?
2.
  - (a) Nemáme nějaký **odhad**?
  - (b) Jak to dopadne na dalších **křivkách**?
  - (c) Co **definice** limity?

## Hinty

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

$$|\sin t| \leq 1$$

$$\pm xy \leq x^2 + y^2$$

$$|\sin t| \leq |t|$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

## Příklady – limity, které ilustrují různé situace

1. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.  
**Všechny limity uvažujeme vzhledem k definičnímu oboru daných funkcí.**

- (a) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

- (b) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

- (c)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

Ukažte, že limita funkce neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

- (d)\*  $\lim_{(x, y) \rightarrow [0, 0]} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- (e)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (4, 0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$

(f) UkaŹte, Źe pro funkci  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  limity

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  a  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  neexistují, ale  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  vzhledem k definičnímu oboru funkce  $f$  existuje a je rovna 0.

2. Shrňte, jak situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojn limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje; . . .)

### Příklady – limity na procvičení

3. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukaŹte, Źe neexistují.

**Všechny limity uvaŹujeme vzhledem k definičnímu oboru danch funkcí.**

- |                                                                                 |                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$                          | (j) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left( 1 + \frac{2}{ x + y + z } \right)^{ x + y + z }$ |
| (b) $\heartsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$ | (k) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$                             |
| (c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$                | (l) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$                                |
| (d) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y}$                          | (m) $\star \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$                       |
| (e) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x-y+z}$                 | (n) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$                                    |
| (f) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$          | (o) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$             |
| (g) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$         | (p) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4-xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$                   |
| (h) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$                | (q) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2y( x + y )}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$    |
| (i) $\clubsuit \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2+y^2}{x+y}$              |                                                                                                 |

4. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenkov mapa, Rozhodovací strom. . .

|                                                                                                   |                                                                                                            |                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\tau \hbar + \tau x \succ \tau x \cdot \tau \hbar + \tau x \preceq \hbar x   \tau \text{ (og)}$  | $x_\varepsilon^\wedge = \hbar \text{ (}\mathfrak{K}\text{)}$                                               | $\tau \hbar + \tau x \succ \text{ (}\mathfrak{K}\text{)}$                                                         |
| $\tau \hbar + \tau x \succ \hbar x   \tau \cdot   \tau   \succ   \tau \text{ us }   \text{ (wg)}$ | $\tau x + x - = \hbar \text{ (}\mathfrak{I}\text{)}$                                                       | $1 + x \text{ }\mathfrak{A}\mathfrak{I}\mathfrak{E}\mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{Y}\mathfrak{A} \text{ (qg)}$ |
|                                                                                                   | $\mathfrak{A}\mathfrak{I}\mathfrak{Y}\mathfrak{I}\mathfrak{E} \text{ } \tau \text{ (}\mathfrak{H}\text{)}$ | $\tau \hbar + \tau x \succ \hbar x   \tau \text{ (pI)}$                                                           |