

18. cvičení – Parciální derivace

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Parciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Věta 2. Nechť je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0; y_0]$. Pak v bodě $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Algoritmus - jak upočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$

1. Určíme **definiční obor** $f(x, y)$.
2. Spočteme parciální **derivace mechanicky** tam, kde to jde.
3. Identifikujeme **problematické body** - funkce je tam definovaná, ale mechanické derivování nefunguje. Dáváme pozor na
 - (a) kraje definičního oboru původní funkce;
 - (b) body, kde je funkce definovaná, ale mechanické derivování ne (např. funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$);
 - (c) místa, kde je funkce definovaná po částech;
 - (d) funkce: absolutní hodnota, sgn, odmocniny, arcsin a arccos. . .
4. Zafixujeme jeden konkrétní problematický bod $[x_0, y_0]$ a **z definice** spočítáme parciální derivaci. (Jde o limitu s 1 proměnnou, vše krom t je vlastně parametr.)
5. Typicky vyjde limita závislá na parametru - diskutujeme výsledek vzhledem k tomu parametru (podezřelému bodu $[x_0, y_0]$).
6. Uděláme **závěr**, kde všude derivace existují a kolik vyjdou.
7. Poznámky:
 - (a) Parciální derivace lze počítat pouze tam, kde je definovaná původní funkce.
 - (b) Parciální derivace je limita (na řezu) - lze ji počítat pouze tam, kde existuje správné okolí bodu. (Např. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je definovaná na kruhu. Parciální derivace v krajních bodech (na kružnici) spočítat nelze, protože se tam není jak „přiblížit“.)

Příklady

1. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

(a) $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 6xy$

(b) $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$

(c) $f(x, y) = xy \tan\left(\frac{x}{y}\right)$

(d) $f(x, y) = x^y$

(e) $f(x, y) = xe^{xy}$

(f) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

(g) $f(x, y) = (x + y)^x$

(h) $f(x, y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$

(i) $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y}$

(j) $f(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{x+y}{x-y}$

Příklady - zkouškové

Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php>

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$, napište rovnici tečné roviny v bodě $a = [1, 2]$

(a) $f(x, y) = |x^2 - y^2|$

(b) $f(x, y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$

(c) $f(x, y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0, 1]$

(d) $f(x, y) = \min\{x^2 + y^2; 2 - x^2 - y^2\}$

(e) $f(x, y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$

(f) $f(x, y) = x^{(y^x)}$

(g) $f(x, y) = (\arctan \sqrt{x^2 + y^2})^4$

(h) $f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y), & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2, & x < 0 \end{cases}$

Bonusové příklady

3. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

4. Necht' T je tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t, t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T osu z (přímku $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$)?

Pozn.: Normála ke grafu funkce je určena rovnicemi

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = z_0 - t$$

(2b) Z definice derivujte jen $g = |xy|$
(2c) Nakreslete si D_f , $\sin(\frac{z}{3}) + 2k\pi + t = -\cos t$, $(Jf)(z) = q^v e^{\log a} = |t|$