



17. cvičení – Funkce více proměnných

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete a zakreslete definiční obor dané funkce

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^3 y^3}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

$$0 \leq x^3 y^3,$$

neboli

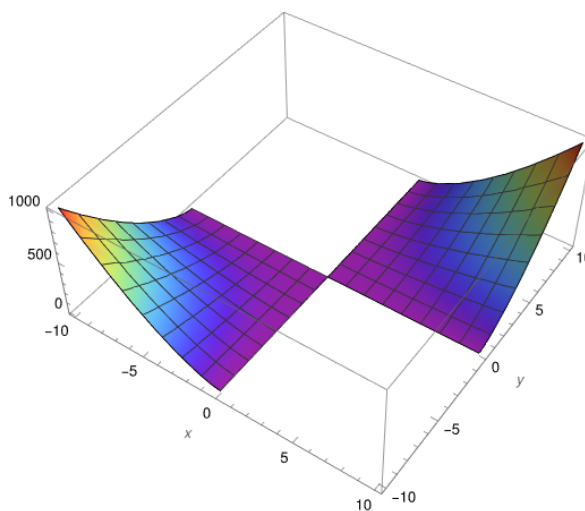
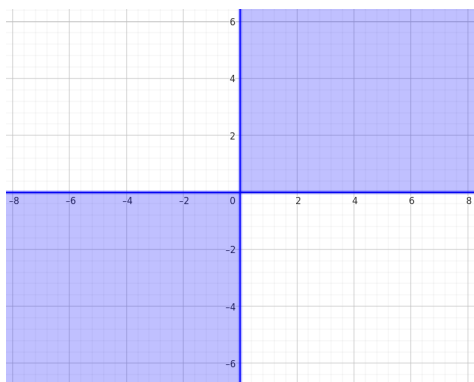
$$0 \leq xy.$$

Tedy

$$(y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0).$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0)\}$$



(b) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\arcsin$ potřebujeme

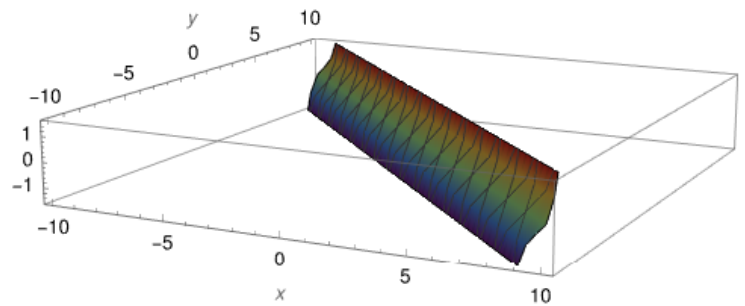
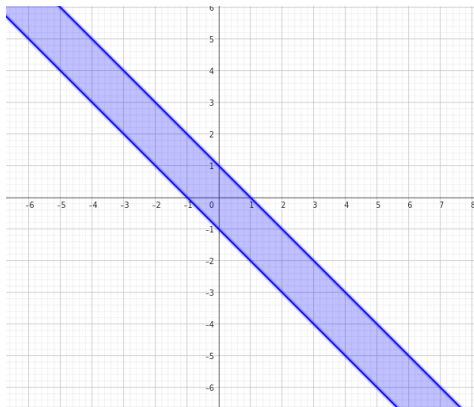
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

tedy

$$y \leq 1 - x, \quad -1 - x \leq y.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, -1 - x \leq y\}$$



(c) $f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

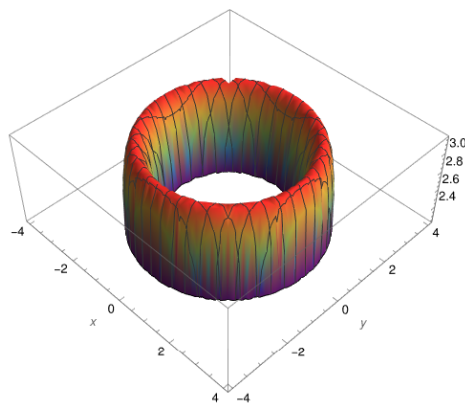
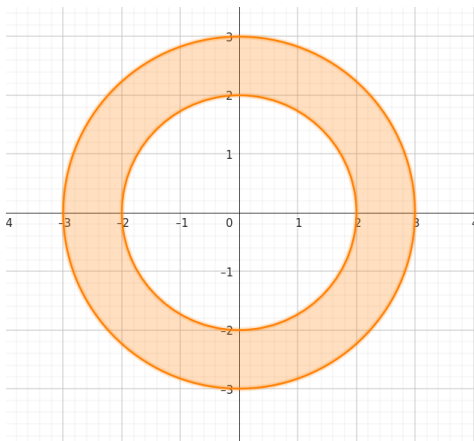
$$0 \leq 9 - (x^2 + y^2) \wedge x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

tedy

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$



(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \ln(16 - x^2 - 16y^2)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\ln$ potřebujeme

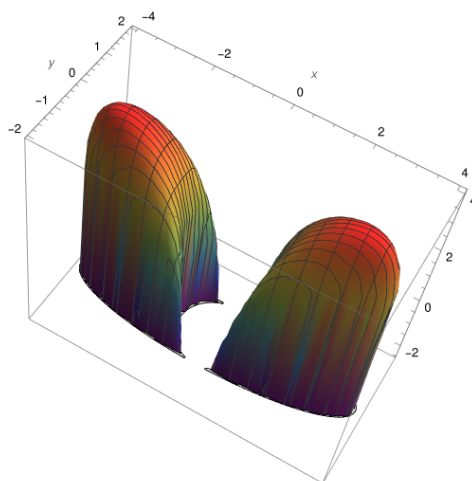
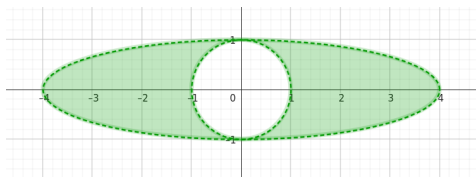
$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \wedge 16 - x^2 - 16y^2 > 0$$

tedy

$$x^2 + y^2 > 1 \wedge 16 > x^2 + 16y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge 16 > x^2 + 16y^2\}$$



(e) $f(x, y) = \arcsin(xy)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\arcsin$ potřebujeme

$$-1 \leq xy \leq 1$$

Uvažujme případy

- pro $x = 0$ jsou nerovnosti splněny.
- pro $x > 0$ máme

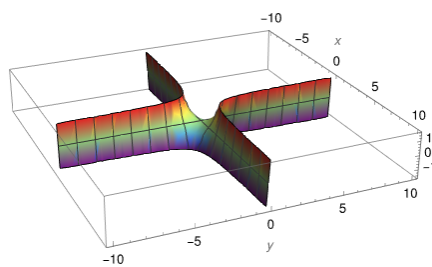
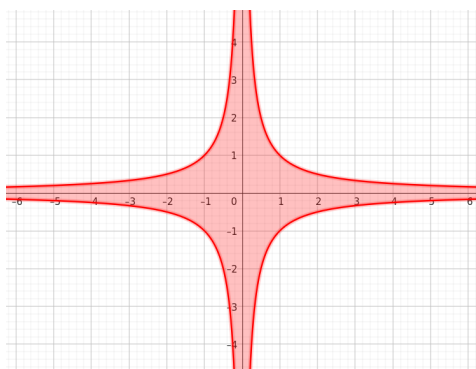
$$-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$$

- pro $x < 0$ máme

$$\frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$



(f) $f(x, y) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\ln$, $\sqrt{t}$ a zlomku potřebujeme

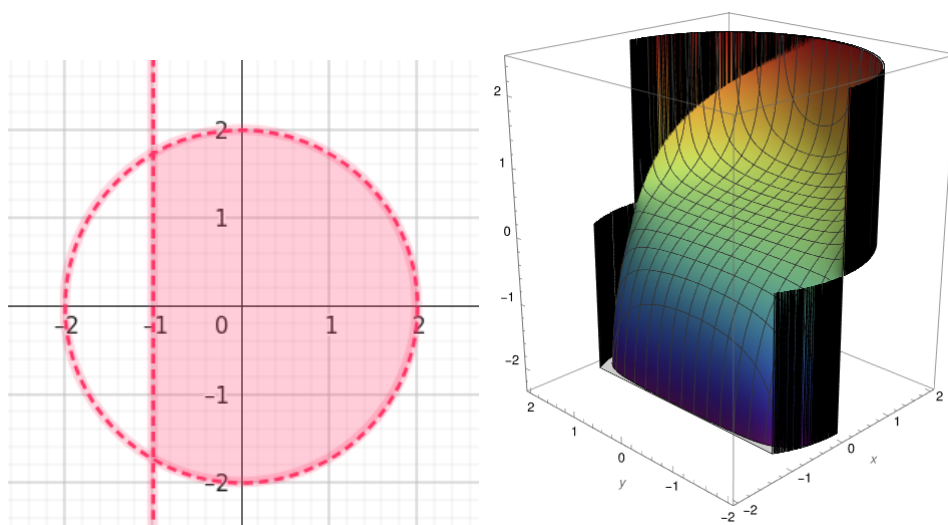
$$x + 1 > 0 \wedge 4 - (x^2 + y^2) > 0$$

tedy

$$x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2\}$$



(g) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

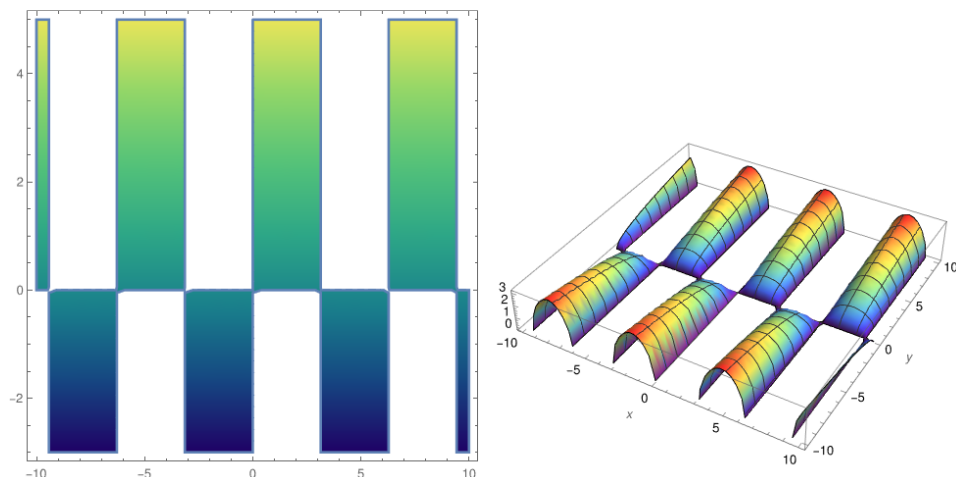
$$y \sin x \geq 0$$

tedy

$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)\}$$



2. Určete a zakreslete vrstevnice následujících funkcí

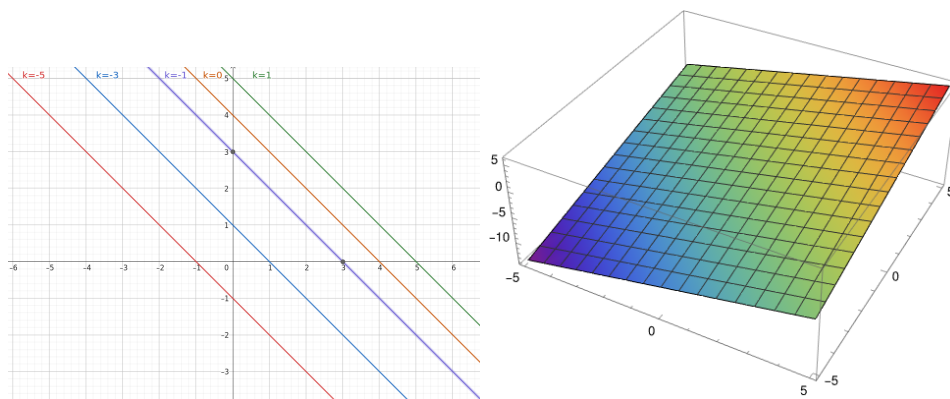
(a) $f(x, y) = x + y - 4$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x + y - 4 = k,$$

což jsou přímky.



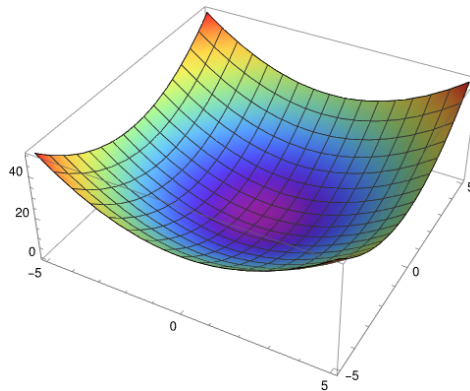
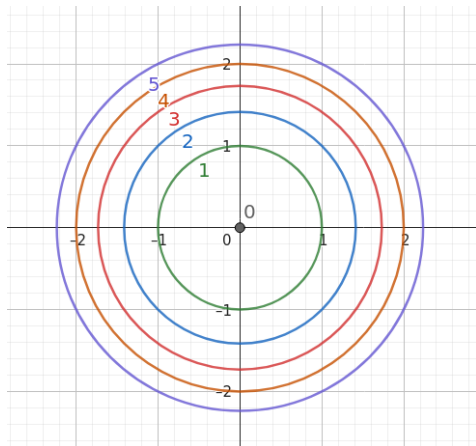
(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x^2 + y^2 = k.$$

Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o kružnice se středem v počátku a o poloměru $\sqrt{k}$.



(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

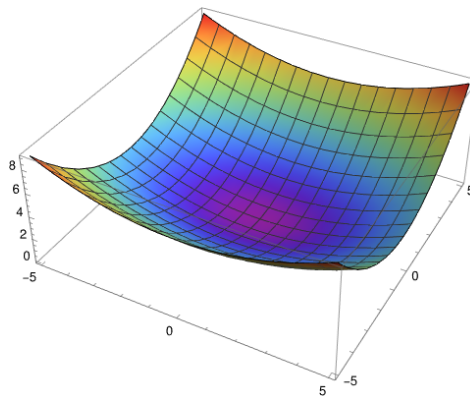
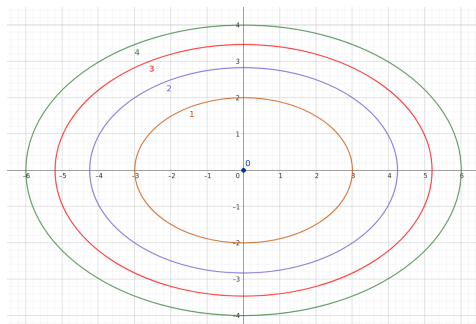
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujeme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = k$$

$$\frac{x^2}{9k} + \frac{y^2}{4k} = 1.$$

Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o elipsy se středem v počátku a s poloosami $2\sqrt{k}$ a $2\sqrt{k}$.



(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6$

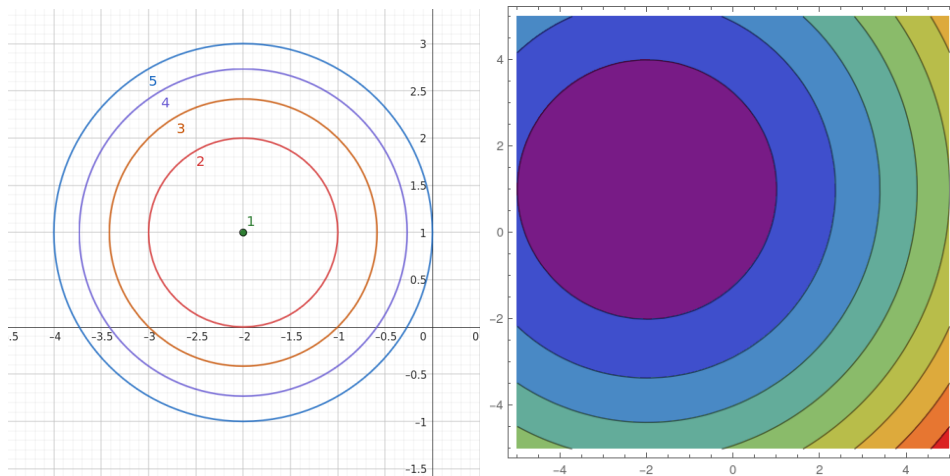
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujeme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = k$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = k - 1$$

Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 1$. Konkrétně pro $k = 1$ jde o jeden bod $([-2, 1])$, pro $k > 1$ jde o kružnice se středem v $[-2, 1]$ a s poloměrem $\sqrt{k - 1}$.



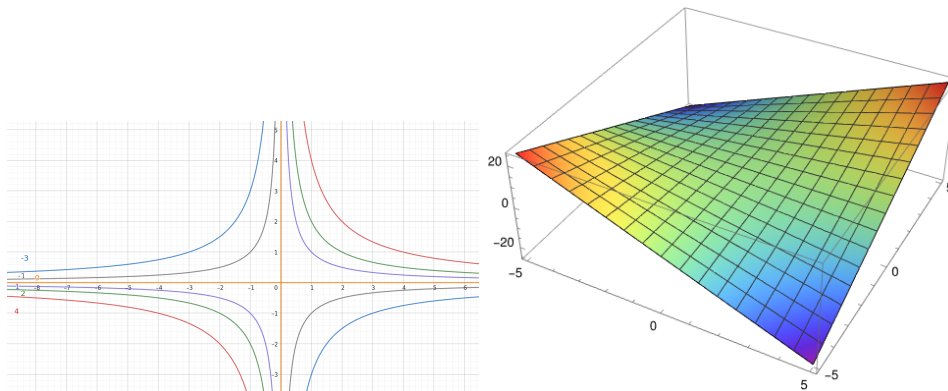
(e) $f(x, y) = xy$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujeme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$xy = k$$

Pro $k = 0$ jsou vrstevnicemi osy souřadnic. Pro $k \neq 0$ lze přepsat $y = \frac{k}{x}$, kde $x \neq 0$, jde tedy o hyperboly..



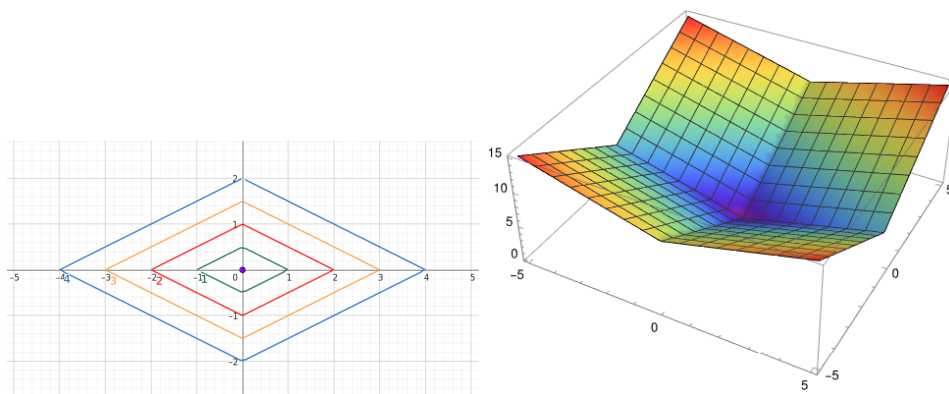
(f) $f(x, y) = |x| + 2|y|$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujeme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$|x| + 2|y| = k$$

Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Pro $k = 0$ jde o jeden bod - počátek. Pro $k > 0$ vyjdou kosodélníky. (Lze rozepsat pro kladná a záporná x, y zvlášť a kreslit po kvadrantech.)



3. Určete definiční obor a načrtněte.

(a) $f(x, y) = \arcsin(x + y) + \arctan(x + y) + xy$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\arcsin$ potřebujeme

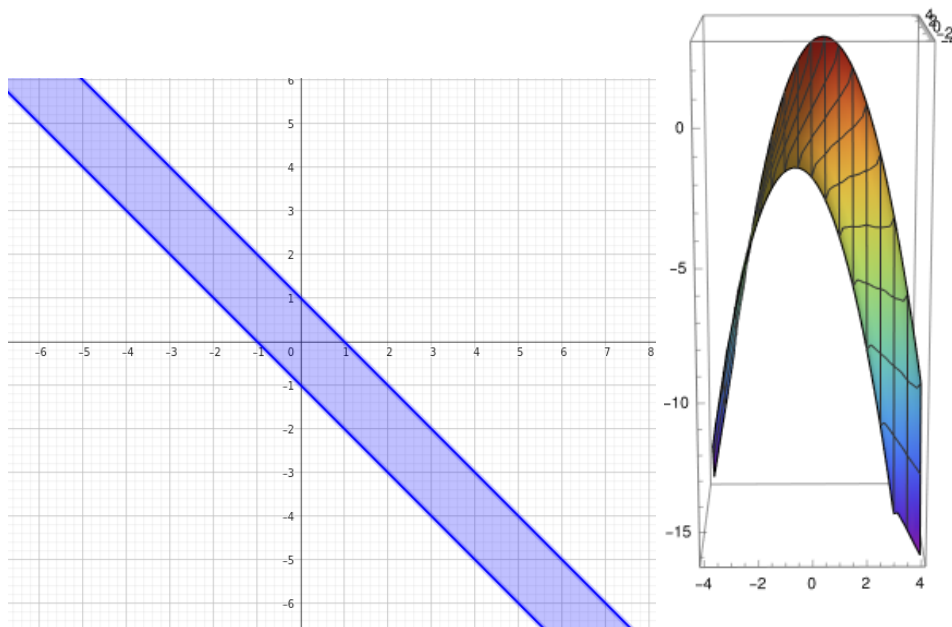
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

tedy

$$y \leq 1 - x, \quad -1 - x \leq y.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, -1 - x \leq y.\}$$



(b) $f(x, y) = \log\left(\frac{x}{|x| - |y|}\right)$

Řešení: Máme podmínky

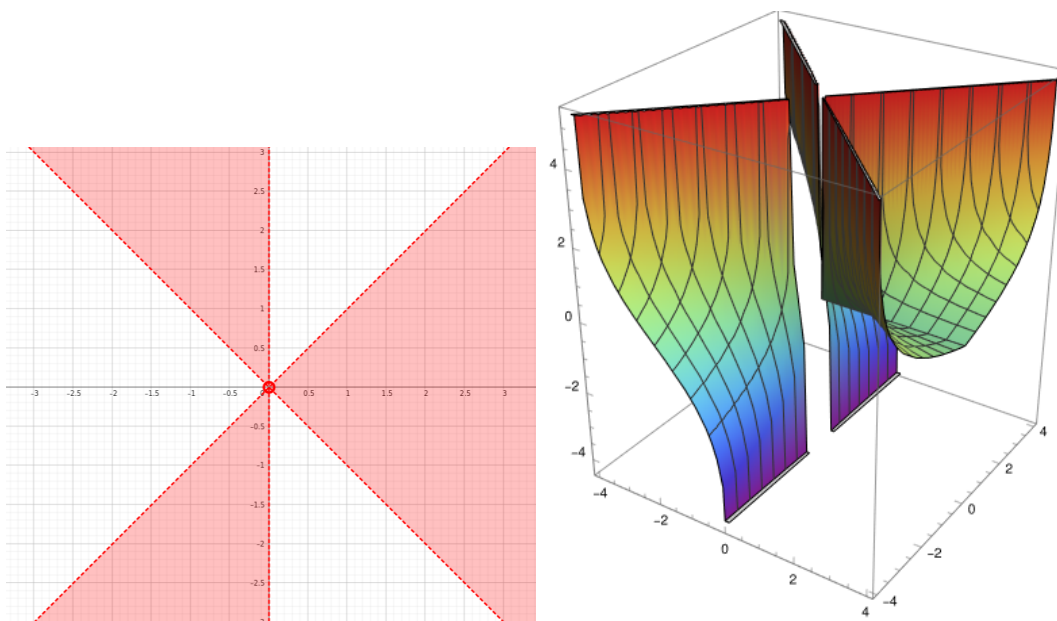
$$x \neq 0, \quad |x| \neq |y|, \quad \frac{x}{|x| - |y|} > 0$$

Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0 \wedge |x| - |y| > 0) \vee (x < 0 \wedge |x| - |y| < 0).$$

Závěr:

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x| - |y|} > 0 \right\}$$



(c) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

Řešení: Podmínky:

$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

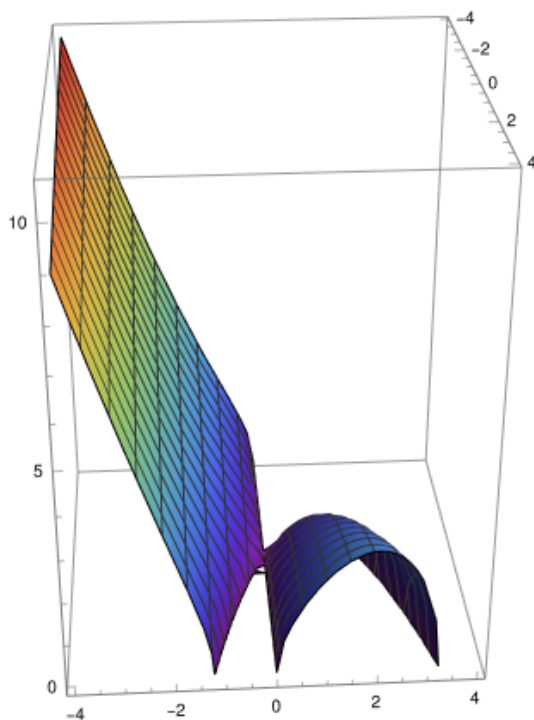
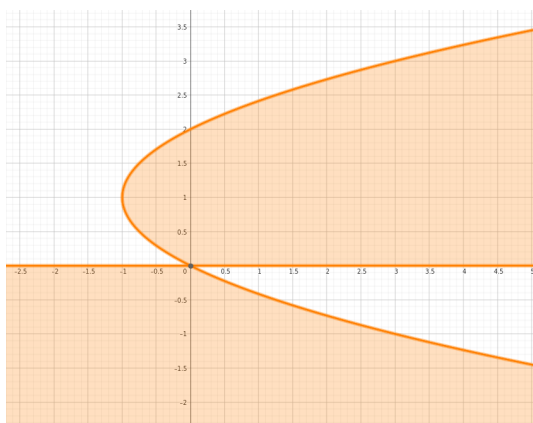
Tedy

- $y = 0, x \in \mathbb{R}$, nebo
- $x = y^2 - 2y$, nebo
- $x \geq y^2 - 2y \wedge y \geq 0$, nebo
- $x \leq y^2 - 2y \wedge y \leq 0$.

Navíc lze upravit $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$.

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0\}$$



(d) $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

Řešení: Podmínky

$$0 \leq x(x+y) \leq 1$$

Tedy

- $x \geq 0 \wedge y \geq -x$, nebo
- $x \leq 0 \wedge y \leq -x$, nebo
- $x = 0, y \in \mathbb{R}$, nebo
- $y = -x$.

Zároveň musí být splněno

$$x(x+y) \leq 1$$

$$x^2 + xy \leq 1$$

$$xy \leq 1 - x^2$$

Tedy

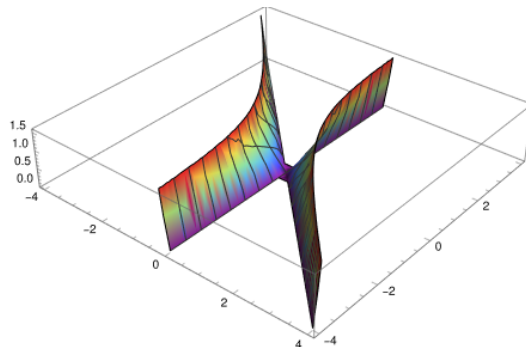
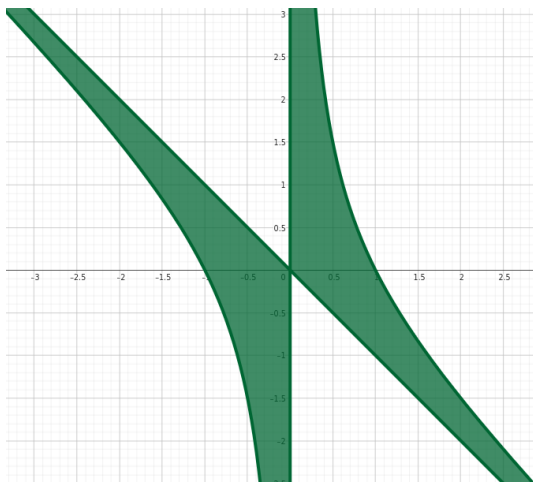
- $x = 0, y \in \mathbb{R}$, nebo
- $x > 0 \wedge y \leq \frac{1}{x} - x$, nebo
- $x < 0 \wedge y \geq \frac{1}{x} - x$.

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x(x+y) \leq 1\}$$

4. Najděte definiční obor.

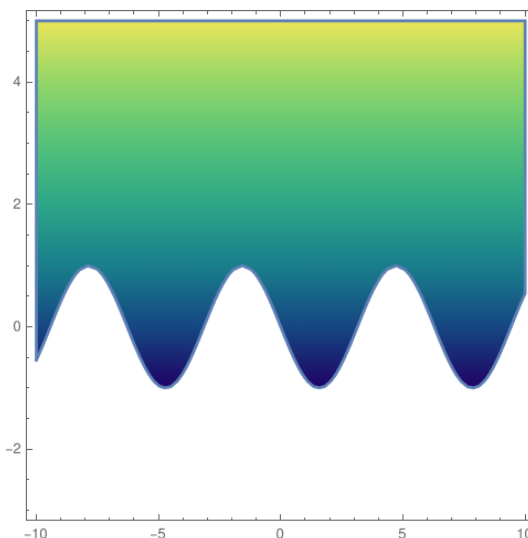
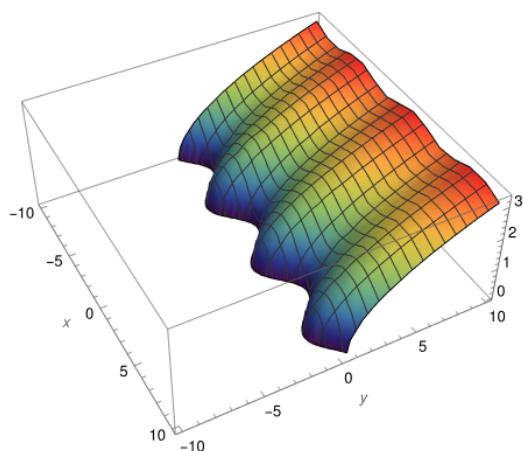
Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php>



(a) $f(x, y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0, 1]$

Řešení: Definiční obor:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y + \sin x \geq 0\}$$



(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$, $a = [1, 2]$

Řešení:

- Definiční obor:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$

(c) $f(x, y) = x^{(y^x)}$, $a = [1, 2]$

Řešení: Funkci přepíšeme jako

$$x^{(y^x)} = e^{y^x \log x} = e^{e^{(x \log y) \log x} \log x}$$

Definiční obor:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$$

