



16. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[0, \infty)$.
- u 0: Funkce f je spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $[0, 1]$, tedy $\int_0^1 |f| dx$ konverguje.
- u ∞ : Odhadneme

$$\left| \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^\infty f(x) dx$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x) dx$ konverguje.

(b) $\heartsuit \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, \frac{\pi}{2})$.
- u 0: Funkci $\tan x$ u 0 srovnáváme s x , tedy $g(x) = x^\alpha$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\tan^\alpha x}{x^\alpha} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^\alpha$. Tedy právě tehdy, když $\alpha > -1$.

- u $\frac{\pi}{2}$: Máme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funkci $\sin x$ srovnáme s 1, funkci $\cos x$ s $(\frac{\pi}{2} - x)$. Dohromady tedy $g(x) = 1/(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\tan^\alpha x}{(\frac{\pi}{2}-x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^\alpha x}{1} \cdot \left(\frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x} \right)^\alpha = 1 \in (0, \infty).$$

(Limitu $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)

Tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^{-\alpha}$. Tento integrál lze přímo spočítat a dostaneme, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-1, 1)$.

(c) $\clubsuit \int_0^\pi \log(\sin x) dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, \pi)$. Navíc $f \leq 0$, budeme tedy vyšetřovat $|f| = -\log(\sin x)$.

- u 0: Funkci $\sin x$ u 0 srovnáváme s x , tedy zvolme $g(x) = -\log x$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\log(\sin x)}{-\log x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\log x$, který ale konverguje (lze upočítat).

- u π : Funkci $\sin x$ srovnáme s $(\pi - x)$, Tedy $g(x) = -\log(\pi - x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{-\log(\sin x)}{-\log(\pi - x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{(\pi-x)}} = 1 \in (0, \infty).$$

(Limitu $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi-x)}{\sin x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)

Tedy $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log(\pi - x)$.

Tento integrál lze přímo spočítat a zjistíme, že konverguje.

Závěr: $\int_0^{\pi} f(x) dx$ konverguje.

(d) $\int_1^{\infty} \sin(x^\alpha) dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[1, \infty)$.
- $\alpha = 0$, pak $f(x) = \sin 1$ a integrál diverguje.
- $\alpha < 0$: x^α jde u ∞ do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^\alpha$ s $g(x) = x^\alpha$ (míříme k známé limitě $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\sin x^\alpha|}{x^\alpha} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} x^\alpha dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

- $\alpha > 0$: Nejprve substituujeme $y = x^\alpha$, pak $dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$, meze budou $(1, \infty)$. Tedy

$$\int_1^{\infty} \sin(x^\alpha) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \sin(x^\alpha) \alpha x^{\alpha-1} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin y dy$$

Převodli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $\frac{1}{\alpha} - 1 < -1$, tedy pro $\alpha < 0$. Jelikož jsme ale předpokládali, že $\alpha > 0$, tak původní integrál absolutně nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Závěr: $\int_1^{\infty} f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

(e) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[0, \infty)$.
- u ∞ budeme srovnávat s e^{-x} . Pro $x \geq 1$ máme

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &\leq e^{-x} \\ -x^2 &\leq -x \\ x &\leq x^2 \end{aligned}$$

Protože $\int_0^\infty e^{-x} dx$ konverguje (lze přímo upočítat), tak ze srovnávacího kritéria konverguje i $\int_1^\infty f(x) dx$

Závěr: $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje.

(f) $\int_0^1 \log x dx$

Řešení: Lze přímo spočítat (per partes)

$$\int_0^1 \log x dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 dx = [x \log x]_0^1 - [x]_0^1 = -1.$$

Závěr: integrál $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje.

(g) $\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, 1]$.
- $p = 0$, pak $f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$ a tedy integrál $\int_0^1 f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když $q < 1$.
- $p > 0$: x^p jde u 0 do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^p$ s x^p . Celkem máme $g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{p-q} dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $p - q > -1$.

- $p < 0$: Analogicky příkladu (1d): substituujeme $y = x^p$ (tedy $y^{1/p} = x$), pak $dy = px^{p-1} dx$, meze budou $(1, \infty)$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx = - \int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}}} \cdot \frac{1}{p} \cdot y^{\frac{1}{p}-1} dy = - \frac{1}{p} \int_1^\infty \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}} dy$$

Převodli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $1 + \frac{q}{p} - \frac{1}{p} > 1$, tedy pro $\frac{q-1}{p} > 0$. Protože $p < 0$, máme $q - 1 < 0$.

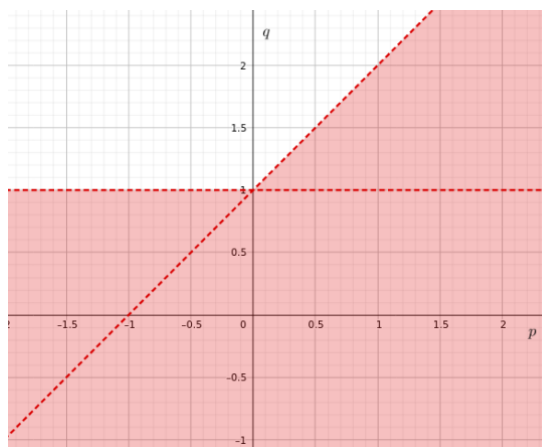
Závěr: $\int_0^1 f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když

$$(p = 0 \ \& \ q < 1) \vee (p > 0 \ \& \ p - q > -1) \vee (p < 0 \ \& \ q < 1)$$

lze psát i

$$(q < 1 \ \& \ p \in \mathbb{R}) \vee (q \geq 1 \ \& \ p > q - 1)$$

Vztahy p a q jsou znázorněny na obrázku



(h) i. $\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, 1)$.

- u 0:

A. $k \geq 0$: Pak $x^k \leq 1$, tedy „1 vede nad x^k “. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|\log x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 0, \end{cases} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 |\log x|^\alpha dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

B. $k < 0$: Pak $1 \leq x^k$, tedy „ x^k vede nad 1“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log x|^\alpha}{x^k} dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

- u 1: $|\log x|$ budeme srovnávat s $|1-x|$, dohromady tedy $g(x) = |1-x|^\alpha$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|1-x|^\alpha} = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 |1-x|^\alpha dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ (lze přímo upočítat nebo substituuovat $y = 1-x$ a převést na známý integrál).

Závěr: $\int_0^1 f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

ii. $\int_1^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1 postupujeme analogicky jako v předchozím příkladě. Zjistíme, že $\int_1^2 f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.
- u ∞ :
A. $k \geq 0$: Pak $x^k \geq 1$, tedy „ x^k vede nad 1“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 0, \end{cases} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{x^k} dx$, který ale konverguje právě tehdy, když $(k > 1, \alpha \in \mathbb{R})$ nebo $(k = 1, \alpha < -1)$.

- B. $k < 0$: Pak $1 \geq x^k$, tedy „1 vede nad x^k “. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^k} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty |\log x|^\alpha dx$, který ale diverguje pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Závěr: $\int_1^\infty f(x) dx$ absolutně konverguje právě tehdy, když $k > 1$ & $\alpha > -1$.

(i) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, 1]$.
- Protože $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak lze funkci spojitě rozšířit do 0. Tedy $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje.

(j) $\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, 2]$.
- u 1: máme $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$. Funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \in (0, \infty)$$

Tedy $\int_1^2 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$, který ale konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_1^2 f(x) dx$ konverguje.

(k) $\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x dx$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, \infty)$.
- u 0: funkci $\arctan x$ srovnáváme s x . Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha x^\beta$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha x^\beta} = 1 \in (0, \infty)$$

Tedy $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta}$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$.

- u ∞ : funkci $\arctan x$ srovnáváme s $\frac{\pi}{2}$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta} = 1 \in (0, \infty)$$

Tedy $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$, $\alpha < -1$.

(l) $\int_0^\infty x^a + x^b dx$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, \infty)$, navíc $x^a > 0$ a $x^b > 0$ na $(0, \infty)$.
- u 0: $\int_0^1 x^a dx$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$. Analogicky $\int_0^1 x^b dx$ konverguje právě tehdy, když $b > -1$.
Dohromady tedy $\int_0^1 x^a + x^b dx$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$, $b > -1$.
(Lze i přímo upočítat.)
- u ∞ : $\int_1^\infty x^a dx$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$. Analogicky $\int_1^\infty x^b dx$ konverguje právě tehdy, když $b < -1$.
Dohromady tedy $\int_1^\infty x^a + x^b dx$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$, $b < -1$.
(Lze i přímo upočítat.)

Závěr: $\int_0^\infty f(x) dx$ diverguje pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

(m) $\int_0^1 x^{\log x} dx$

Řešení:

- Funkci přepíšeme $f(x) = x^{\log x} = e^{\log x \log x} = e^{\log^2 x}$. Tedy funkce f je spojitá na $(0, 1]$.
- u 0: Na intervalu $(0, \frac{1}{e})$ platí $\log x < -1$. Tedy

$$x^{\log x} > x^{-1}$$

Protože $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x} dx$ diverguje, tak ze srovnávacího kritéria diverguje i integrál $\int_0^{\frac{1}{e}} x^{\log x} dx$.

Závěr: $\int_0^1 f(x) dx$ diverguje.

$$(n) \int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p} dx$$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, 2]$.
- u 1: funkci $\arctan(x-1)$ srovnáváme s $(x-1)$ (chová se jako $\arctan$ u 0). Funkci $(x-\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ budeme srovnávat s $(\sqrt{x}-1)$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(x-\sqrt{x})^p} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p} \\ &= 1 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Tedy $\int_1^2 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}} dx$.

- Konvergence integrálu $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}} dx$: Substituce $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y dy$$

Integrál srovnáme s $h(y) = \frac{1}{(y-1)^p}$. Pak

$$\lim_{y \rightarrow 1+} \frac{\frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y}{\frac{1}{(y-1)^p}} = 4 \in (0, \infty)$$

Tedy $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y dy$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(y-1)^{p-1}} dy$, což je právě tehdy, když $1-p > -1$, tedy $p < 2$.

Závěr: $\int_1^2 f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $p < 2$.

$$(o) \int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n} dx$$

Řešení:

- $p = 0$, pak $f \equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p > 0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$

tedy $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^1 px^{1-n} dx$ konverguje $\Leftrightarrow 1-n > -1 \Leftrightarrow 2 > n$.

U ∞ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$

Tedy $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-n} dx$ konverguje $\Leftrightarrow n < 1$.

- $p < 0$: funkce $\arctan x$ je lichá, tedy $\arctan px = -\arctan |p|x$ pro $x \in (0, \infty)$ a tedy konvergence vyjde stejně jako pro $p > 0$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p = 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Jinak diverguje.

(p) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(-1, 1)$. Funkci rozepíšeme jako

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

- u -1 srovnáváme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{-1}^0 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$, který konverguje (lze přímo spočítat).

- u 1 srovnáváme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$, který konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_{-1}^1 f(x)$ konverguje.

(q) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \log^2(1+x)} dx$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, \frac{1}{2}]$.
- u 0 : máme $\arcsin(x^2+x^3) = \arcsin(x^2(1+x))$, budeme ho srovnávat s x^2 . Funkci $\log(1+x)$ srovnáváme s x . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x^2}{x \cdot x^2}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \log^2(1+x)}}{\frac{x^2}{x \cdot x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2(1+x)} \cdot \frac{x^2}{\log^2(1+x)} \cdot (1+x) = 1 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$, který diverguje.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ diverguje.

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů $(\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R})$:

(a) $\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}} dx$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0, 1]$, u 0 limitně srovnáme s $g(x) = \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}}{\frac{x}{\sqrt{x^3}}} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i zadaný integrál.

(b) $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2 - 1} dx$

Řešení:

$$\frac{e^x}{x^2 - 1} = \frac{e^x}{(x - 1)(x + 1)}$$

U 1 použijeme LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{e^x}{(x-1)(x+1)}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{e}{2}$$

Protože $\int_1^2 \frac{1}{x-1} = \infty$ (lze přímo upočítat), z LSK plyne i divergence $\int_1^2 f(x)$.

(c) $\int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}} dx$

Řešení: Provedeme substituci $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$:

$$\int_1^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy$$

Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce spojitá a nezáporná. Roztrhneme na integrály $\int_0^1 + \int_1^\infty$.

U 0: srovnáme s funkcí $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{e^y \sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{e^y} = 1 \in (0, \infty)$$

Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ konverguje (lze spočítat), konverguje z LSK i $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y} e^y}$.

U ∞ : Použijeme SK, pro $y \geq 1$ máme

$$\frac{1}{\sqrt{y} e^y} \leq \frac{1}{e^y}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-y} dy$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{y} e^y}$.

Závěr: původní integrál Konverguje.

(d) $\int_0^1 x^{-\ln x} dx$

Řešení: Máme

$$\int_0^1 x^{-\ln x} dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x} dx.$$

Funkce je spojitá na $(0, 1]$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-\ln^2 x} = 0.$$

Funkci lze tedy spojitě rozšířit na (omezený) interval $[0, 1]$ a tedy integrál konverguje.

$$(e) \int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n} dx$$

Řešení:

- $p = 0$, pak $f \equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p > 0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^1 px^{1-n}$ konverguje $\Leftrightarrow 1 - n > -1 \Leftrightarrow 2 > n$.

U ∞ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$

Tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-n}$ konverguje $\Leftrightarrow n > 1$.

Tedy pro $p > 0$ integrál diverguje pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

- $p < 0$: Protože $\arctan x$ je lichá funkce, tak platí $\arctan px = -\arctan |p|x$, čímž jsme převedli příklad na předchozí případ.

Dohromady $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p = 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Jinak diverguje.

$$(f) \int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}} dx$$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0, \pi)$. Problematické body: 0 a π .

U 0: srovnáme s $g(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\ln(\sin x)|}{x\sqrt{\sin x}}}{\frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}} = 1.$$

Protože $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln x| x^{-3/2} = \infty$ (z tabulky nebo odvodíme), tak u 0 diverguje i náš původní integrál. U π tedy už nemusíme vyšetřovat.

Závěr: diverguje.

$$(g) \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p} dx$$

Řešení: Funkce spojitá na $(0, \infty)$. U 0 srovnáme s $g(x) = \frac{x^3}{x^p}$ (uhodneme z Taylorova rozvoje funkce $x - \sin x$).

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x - \sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}} = \frac{1}{6} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^p}$ z LSK konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{3-p}$. Tedy právě tehdy, když $3 - p > -1 \Leftrightarrow p < 4$.

U ∞ : srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{x}{x^p}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x - \sin x}{x^p}}{\frac{x}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - 0$$

Z LSK tedy konverguje právě tehdy, když $\int_1^\infty x^{1-p}$ konverguje, což je $\Leftrightarrow 1-p < -1$
 $\Leftrightarrow 2 < p$.

Závěr: Integrál konverguje $\Leftrightarrow 2 < p < 4$.

$$(h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$$

Řešení: U 0 srovnáme s $g(x) = x^p$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^p x \cos^q x}{x^p} = 1,$$

tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ konverguje $\Leftrightarrow p > -1$.

U $\frac{\pi}{2}$ LSK s $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)^q$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x \cos^q x}{(\frac{\pi}{2} - x)^q} = 1,$$

tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)^q$ konverguje. Lze upočítat nebo substituovat
a vyjde, že integrál konverguje $\Leftrightarrow q > -1$.

Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow (p > -1 \wedge q > -1)$.

$$(i) \int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} \, dx$$

Řešení: U ∞ : LSK s $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Protože $\int_1^\infty x^{-2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.

$$(j) \int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \, dx$$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0, \infty)$.

U 0: srovnáme s $g(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x}}{\frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}} = 1 \in (0, \infty).$$

Navíc $\int_0^1 \sin \frac{1}{x}$ konverguje, protože $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ a integrál omezené a spojitě funkce
(na $[0, 1]$) konverguje.

U ∞ : $\frac{1}{x} \rightarrow 0+$, tedy $\sin \frac{1}{x}$ „se chová jako“ $\sin u$ u 0. Budeme tedy srovnávat s funkcí
 $g(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{2x^2}$. LSK:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x}}{\frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x}} = 1.$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \, dx$.

Závěr: původní integrál konverguje.

$$(k) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Řešení: Ze SK:

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{\cos x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Protože $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, konverguje i náš integrál.

$$(l) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \log(1+e^x)} dx$$

Řešení: U 0: LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} \log(1+e^x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\log 2} \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i $\int_0^1 f(x)$.

U ∞ : funkce $1+e^x$ „se chová jako“ e^x , tedy LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \log(e^x)} = x^{-3/2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} \log(1+e^x)}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log e^x (e^{-x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \log(e^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\log(e^{-x} + 1)}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Navíc integrál $\int_1^{\infty} x^{-3/2}$ konverguje, tedy z LSK konverguje i $\int_1^{\infty} f(x)$.

Závěr: $\int_0^{\infty} f(x)$ konverguje.

$$(m) \int_0^{\infty} \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha} + 1} - x^\alpha\right) dx$$

Řešení: U ∞ : upravíme odmocniny:

$$\sqrt{x^{2\alpha} + 1} - x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}$$

Pro $\alpha > 0$ srovnáme s $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{1}{2}$$

Tedy z LSK $\int_1^{\infty} f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Pro $\alpha \leq 0$ srovnáme s $g(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x^{2\alpha} + 1} - x^\alpha\right)}{1} = \begin{cases} \sin 1, & \alpha < 0, \\ \sin 3, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Z LSK tedy $\int_1^{\infty} f(x)$ pro $\alpha \leq 0$ diverguje.

U 0 stačí uvažovat $\alpha > 1$. Ale pro takové α je $f(x)$ spojitá na $[0, 1]$, tedy integrál konverguje.

Závěr: $\int_0^{\infty} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α ?

Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ na intervalu $[a, \infty)$. Tedy

- (a) $A \in (0, \infty)$: $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha > 1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha \leq 1$.)
 (b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha > 1$, tak konverguje i $\int_a^\infty f(x) dx$. Pro $\alpha \leq 1$ nelze nic říci.
 (c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \leq 1$, tak diverguje i $\int_a^\infty f(x) dx$. Pro $\alpha > 1$ nelze nic říci.

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) \cdot (x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α ?

Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ na intervalu $[a, b)$. Tedy

- (a) $A \in (0, \infty)$: $\int_a^b f(x) dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha} dx$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha \geq 1$.)
 (b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha} dx$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$, tak konverguje i $\int_a^b f(x) dx$. Pro $\alpha \geq 1$ nelze nic říci.
 (c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha} dx$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \geq 1$, tak diverguje i $\int_a^b f(x) dx$. Pro $\alpha < 1$ nelze nic říci.

5. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

(a) $\int_1^\infty \frac{(x^2 - 1)(\log x)^\alpha}{x^3} dx$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1: funkci $\log x$ srovnáme s $(x-1)$. Funkci $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ srovnáváme s $(x-1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x-1)(x-1)^\alpha$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}}{(x-1)(x-1)^\alpha} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)}{x^3} \cdot \frac{\log^\alpha x}{(x-1)^\alpha} = 2 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 (x-1)^{1+\alpha} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha + 1 > -1$, tedy když $\alpha > -2$. (Lze přímo spočítat.)

- u ∞ : funkci $x^2 - 1$ srovnáváme s x^2 . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x^2 \log^\alpha x}{x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}}{\frac{x^2 \log^\alpha x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty \frac{\log^\alpha x}{x} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ (lze spočítat substitucí $y = \log x$).

Závěr: $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-2, -1)$.

$$(b) \int_0^1 \frac{(e^{1-x} - 1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}} dx$$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, 1)$.
- u 0: funkci $\arcsin(x)$, budeme ho srovnávat s x . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{(e^{1-x} - 1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = (e - 1)^\alpha \frac{\pi}{2} \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, který konverguje.

- u 1: funkci $(e^{1-x} - 1)$ srovnáváme s $1 - x$. Funkci $\arccos x$ srovnáváme s $\sqrt{1 - x}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1 - x)^\alpha \sqrt{1 - x}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{(e^{1-x} - 1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{(1 - x)^\alpha \sqrt{1 - x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)^\alpha \sqrt{1 - x} dx$.

Tedy právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)^{\frac{1}{2} + \alpha}$, což je právě pro $\alpha + \frac{1}{2} > -1$, tedy pro $\alpha > -\frac{3}{2}$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{3}{2}$.

$$(c) \int_1^\infty \frac{\log x}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha dx$$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1: $\log x$, budeme ho srovnávat s $(x - 1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x - 1}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}}$. Máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{\log x}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{x - 1}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log x}{(x - 1)} (\operatorname{arccot} x)^\alpha \\ &= (\operatorname{arccot} 1)^\alpha \in (0, \infty), \end{aligned}$$

tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x - 1}} dx$, který konverguje (lze přímo spočítat).

- u ∞ : funkci $\operatorname{arccot} x$ budeme srovnávat s $\frac{1}{x}$. Funkci $\frac{1}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}}$ srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log x}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x \operatorname{arccot} x)^\alpha = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty (\log x)x^{-\frac{3}{2}-\alpha} dx$, který konverguje právě tehdy, když $-\frac{3}{2}-\alpha < -1$, tedy právě pro $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(d) Ukažte, že funkce $x - \sin x$ je kladná na $(0, \infty)$ a vyšetřete konvergenci

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x} dx$$

Řešení:

- Uvažujme funkci $h(x) = x - \sin x$. Pak $h(0) = 0$ a $h'(x) = 1 - \cos x$ na $x \in (0, \infty)$. Pak $h' \geq 0$ na $(0, \infty)$. Speciálně je $h' > 0$ na $(0, 2\pi)$. Tedy h je rostoucí na $[0, 2\pi]$. Navíc h neklesá na $[2\pi, \infty)$. Tedy $h > 0$ na $(0, \infty)$.
- funkce f je spojitá na $(0, \infty)$.
- funkci $h = x - \sin x$ lze rozvinout jako $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- u 0: budeme srovnávat $\log(x - \sin x)$ s $\log x^3 = 3 \log x$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{3 \log^2 x}{1}$. Máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}}{3 \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(x - \sin x)}{3 \log x} \cdot (x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x) \\ &= 1 \cdot 10 = 10 \in (0, \infty), \end{aligned}$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 3 \log^2 x dx$, který konverguje (nutno ukázat).

Limitu jsme spočetli jako

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(x - \sin x)}{3 \log x} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1 - \cos x}{x - \sin x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x - \sin x} = 1$$

- u ∞ : budeme srovnávat $\log(x - \sin x)$ s $\log x$. Funkci $x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x$ srovnáváme s $x^{\frac{6}{5}}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}}{\frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x - \sin x)}{\log x} \cdot \frac{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}{x^{\frac{6}{5}}} = 1 \in (0, \infty)$$

tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty \frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}} dx$, který konverguje (nutno ukázat).

Limitu jsme spočetli jako

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x - \sin x)}{\log x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x (1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + \log(1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\log(1 - \frac{\sin x}{x})}{\log x} \stackrel{V_{OAL}}{=} 1 + \frac{0}{\infty} = 1 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje.

$$(e) \int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0, 1)$.
- funkci $\arcsin x - \sin x$ lze rozvinout jako $\arcsin x - x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- u 0: budeme srovnávat $\arcsin x - x$ s x^3 . Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s πx . Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x^3)^\alpha (\pi x)^\beta$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x^3)^\alpha (\pi x)^\beta} = \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha \cdot 1 \cdot 1 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \pi^\beta x^{3\alpha+\beta} dx$, který konverguje právě tehdy, když $3\alpha + \beta > -1$.

- u 1: Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s $1 - x$. Plyne z grafu nebo z Taylorova rozvoje funkce $\sin(\pi x)$ v bodě 1. Funkci $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ srovnáváme s $1 - x$. (Opět z grafu nebo z Taylora v 1.)

Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1 - x)^\beta (1 - x)^\alpha$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1 - x)^\beta (1 - x)^\alpha} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^\alpha \pi^\beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)^{\alpha+\beta} dx$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$ (lze převést substitucí $y = 1 - x$ na známý integrál).

Limity jsme spočetli jako

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sin(\pi x)}{(1 - x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\pi \cos(\pi x)}{-1} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1 - x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-1} = \frac{\pi}{2}$$

Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když $(\alpha + \beta > -1 \ \& \ 3\alpha + \beta > -1)$.