



16. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium). Necht' $-\infty \leq a < b < \infty$. Necht' f, g jsou **spojité** a necht' g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nemulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' funkce $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$. Necht' dále je f **spojitá** na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

(b) $\heartsuit \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x dx$

(c) $\wp \int_0^\pi \log(\sin x) dx$

(d) $\ast \int_1^\infty \sin(x^\alpha) dx$

(e) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(f) $\int_0^1 \log x dx$

(g) $\otimes \int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx$

(h) i. $\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k} dx$
ii. $\int_1^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k} dx$

(i) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

(j) $\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

(k) $\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x dx$

(l) $\int_0^\infty x^a + x^b dx$

(m) $\int_0^1 x^{\log x} dx$

(n) $\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p} dx$

(o) $\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n} dx$

(p) $\otimes \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(q) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \log^2(1+x)} dx$

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}} dx$

(b) $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2-1} dx$

(c) $\otimes \int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}} dx$

(d) $\ast \int_0^1 x^{-\ln x} dx$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} \quad & \int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n} dx \\
\text{(f)} \quad & \int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}} dx \\
\text{(g)} \quad & \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p} dx \\
\text{(h)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx \\
\text{(i)} \quad & \int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} dx \\
\text{(j)} \quad & \int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} dx \\
\text{(k)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}} dx \\
\text{(l)} \quad & \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x} \log(1+e^x)} dx \\
\text{(m)} \quad & \int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right) dx
\end{aligned}$$

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$. Necht' existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α ?
4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Necht' existuje $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) \cdot (x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α ?

Zkouškové příklady

5. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_1^\infty \frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3} dx \\
\text{(b)} \quad & \int_0^1 \frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}} dx \\
\text{(c)} \quad & \int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha dx \\
\text{(d)} \quad & \text{Ukažte, že funkce } x - \sin x \text{ je kladná na } (0, \infty) \text{ a vyšetřete konvergenci} \\
& \int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x} dx \\
\text{(e)} \quad & \int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx
\end{aligned}$$

(1b) $\frac{\pi}{2} : \tan x = \sin x / \cos x$, pak užijte slovník	(2c) substituční $u = \sqrt{x}$
(2d) $a^p = b^p = a^{\ln a}$	(2f) začněte s bodem 0
(2g) Taylorův rozvoj	(2m) upravme odmocninu
(1c) u π srovnajte $\sin x$ s $x - x^3$.	
(1d) Pro $0 < \alpha < 1$ substitujte $u = x^\alpha$.	
(1g) Pro $d > 0$ převedte na $\int_0^d \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{\sin u} du$.	
(1p) $1 - x + x^2 = (x-1)(x+1)$.	