15. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ K

   Řešení: Na intervalu $[0,1]$ je funkce f spojitá - spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu konverguje. Stačí tedy vyšetřit $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$.
   Z limitního srovnávacího kritéria s $g = \frac{1}{x^2}$ máme

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty).$$

   Obě funkce jsou na $[1,\infty)$ spojité, kladné. Protože $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^{\infty} f(x)$.
   Dohromady $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}$ konverguje.

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^a\, \mathrm{d}x$ D

   Řešení:

   i. $\displaystyle\int_0^1 x^a\, dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.
   Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.
   Pro $a \neq -1$ je

   $$\int x^a\, dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

   primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje (neboť limita primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).
   Pro $a = -1$ je

   $$\int \frac{1}{x}\, dx \overset{C}{=} \ln x$$

   primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).
   Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

   ii. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\, dx$, kde $a \in \mathbb{R}$
   Pro $a \neq -1$ je

   $$\int x^a\, dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

   primitivní funkcí k funkci x^a na $(1,+\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje.

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\, dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1, +\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje.

Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

Závěr: Nekonverguje pro žádné $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha}\ K \Leftrightarrow \alpha < 1$

Řešení: Převedeme substitucí $y = 3 - x$:

$$\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha} = \int_0^2 \frac{1}{y^\alpha}\, \mathrm{d}y,$$

což konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, \mathrm{d}x$ D

Řešení:

Na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkci $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ diverguje, diverguje i $\int_1^\infty f$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ K

Řešení: Konverguje, protože jde o spojitou funkci na uzavřeném omezeném intervalu.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\, \mathrm{d}x$ D

Řešení: Funkci lze rozložit jako

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}.$$

Aplikujeme LSk s $g = \frac{1}{1-x}$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Ale

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} = [-\ln|1-x|]_0^1 = \infty + 0.$$

Tedy i původní integrál diverguje.

(g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ D

Řešení: Srovnáme LSK s $g = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+2x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0,\infty).$$

Tedy i původní integrál diverguje.

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ K

Řešení: Na intervalu $[0,1]$ jde o spojitou funkci na omezeném a uzavřeném intervalu, tedy konverguje.

Na $[1,\infty)$ užijeme LSK s $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i původní integrál.

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

Budeme srovnávat LSK s $x^{p-1}\cdot 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p-1 > -1$, tedy pro $p > 0$.

ii. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

U jedničky srovnáme LSK s $1\cdot(1-x)^{q-1}$. Máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1-} x^{p-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál u jedničky konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1}$. Převedeme substitucí $y = 1-x$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1} = \int_0^{\frac{1}{2}} y^{q-1}\,\mathrm{d}y,$$

který konverguje právě pro $q-1 > -1$, tedy pro $q > 0$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $p,q > 0$.

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "1 je silnější než x^q" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p > -1$.

B. $q < 0$: "x^q je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^q}{1+x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{-q}} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q > -1$.

ii. $\int_1^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "x^q je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q < -1$.

B. $q < 0$: "1 je silnější než x^q" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když

$$\begin{aligned} &(q \geq 0 \quad \& \quad p > -1 \quad \& \quad p - q < -1) \\ \vee&(q > 0 \quad \& \quad p < -1 \quad \& \quad p - q > -1) \end{aligned}$$

Lze zapsat i jako:

$$\begin{aligned} &(q > p + 1 \quad \& \quad p > -1) \\ \vee&(q < p + 1 \quad \& \quad p < -1) \end{aligned}$$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Ze SK:

$$\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-x} = \frac{1}{e}$, tak konverguje i původní integrál.

(l) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Jestliže $a = 0$, tak je $f \equiv 0$ a integrál konverguje pro všechna $p \in \mathbb{R}$.
Nechť $a \neq 0$. Užijeme LSK s $g = \frac{x^2}{x^p}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1-\cos(ax)}{x^p}}{\frac{x^2}{x^p}} = \frac{1-\cos(ax)}{a^2x^3}a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0, \infty).$$

Tedy původní integrál konverguje právě pro $p - 2 < 1$, tedy $p < 3$.

(m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Aplikujeme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty ye^{-y},$$

což je ale konvergentní integrál.

(n) $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\displaystyle\int_0^1 (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

Funkce je na intervalu $[0,1]$ spojitá. Konkrétně

$$\lim_{x\to 0+} (\pi - 2\arctan x)^\alpha = \pi^\alpha.$$

Spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu $\to$ integrál je konvergentní.

ii. $\displaystyle\int_1^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

U ∞ srovnáme s $x^{-\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\arctan x)^\alpha}{x^{-\alpha}} = 2^\alpha \in (0,\infty).$$

Náš integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

Závěr: Původní integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

(o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arccot}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.
Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} \, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arccot} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x \to 0+} x^a \operatorname{arccot}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} \, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x \, dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1 + (x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x) \, dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a \, dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a \, dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int y^a\,dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a + 1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

Závěr: Integrál diverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

(q) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.

2. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

   Řešení:

   Z definice limity existuje $b > a$ takové, že $0 < A/2 \leq f(x)$ na (b, ∞). Ze srovnávacího kritéria a nezápornosti f pak máme

   $$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_b^\infty \frac{A}{2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

3. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

   Řešení:

   Máme odhad

   $$|x^k f(x)| \leq 1 \cdot |f(x)| \in \mathcal{N}(0, 1).$$

   Tedy ze SK i $x^k f(x) \in \mathcal{N}(0, 1)$.