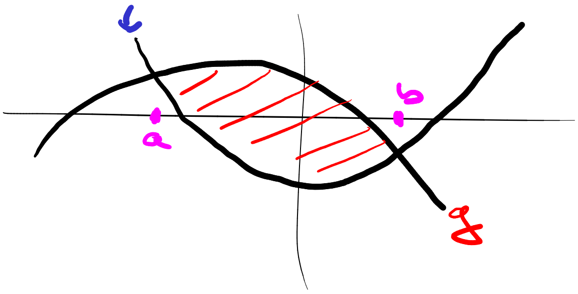
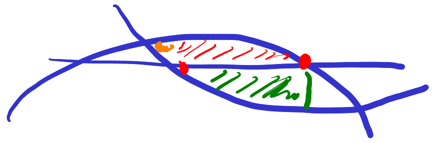
• $f = x^2 + x - 3$ $\qquad g(x) = -x^2 - 2x + 2$



f g



$$\int_a^b g - f$$

průsečíky

$$x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -5/2$$

$$\int_{-5/2}^{1} -x^2 - 2x + 2 - (x^2 + x - 3)\,dx = \int_{-2{,}5}^{1} -2x^2 - 3x + 5\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right]_{-5/2}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 - \left(\frac{250}{54} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2}\right)$$

$$= \frac{343}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$

spoj. na $[1, \infty)$

nerost ✓

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

konv.

$$\sum k \Leftrightarrow \int k$$

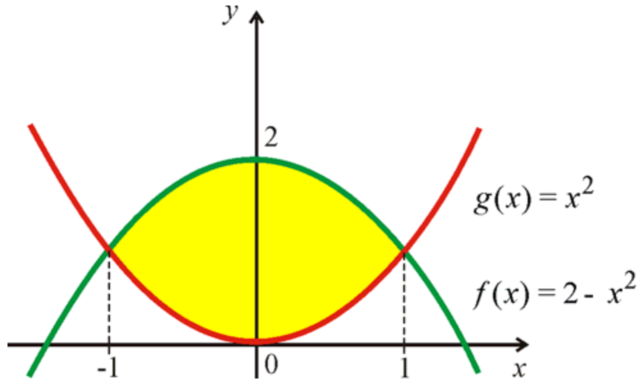
Závěr $\sum \frac{1}{n^2}$ k

$$= \pi r^3 \int_1^{-1} (-1)(1-u^2)du = \pi r^3 2\int_0^1 (1-u^2)du = 2\pi r^3 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Příklad 3.3.3. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x.

Řešení:

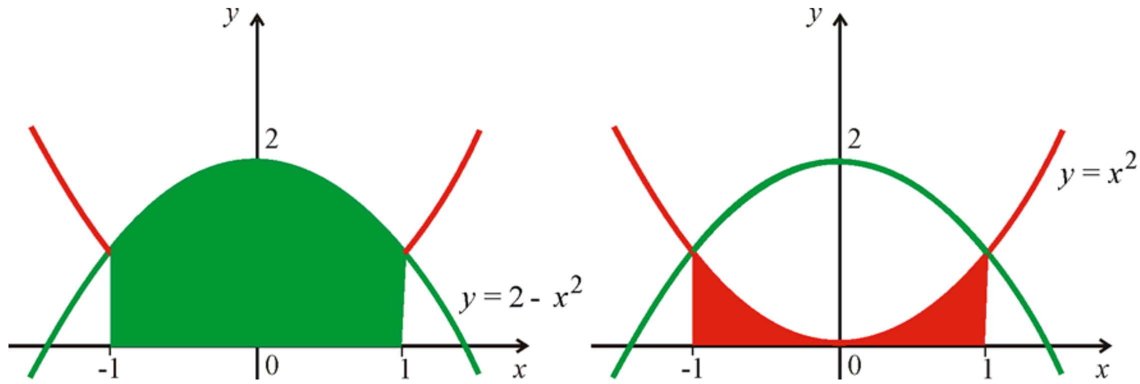
Oblast je ohraničená dvěma parabolami, viz. obr. 3.3.5.



Obr. 3.3.5. Oblast z příkladu 3.3.3

Křivky $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$ se protínají v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Hledaný objem dostaneme, když od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $f(x) = 2 - x^2$ kolem osy x pro $x \in < -1, 1 >$, odečteme objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou $g(x) = x^2$ na stejném intervalu (obr. 3.3.6).



$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx$$

Obr. 3.3.6. Odečtení objemů dvou těles

Pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x, dostaneme:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2-x^2)^2-(x^2)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(4-4x^2+x^4)-x^4\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx=4\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=8\pi\int_0^1(1-x^2)dx=$$

$$=8\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{16}{3}\pi\,.$$

Poznámka

Upozornění!

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x)\le f(x)$ *kolem osy x pro* $x\in\langle a,b\rangle$, *použijeme vztah*

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx\,.$$

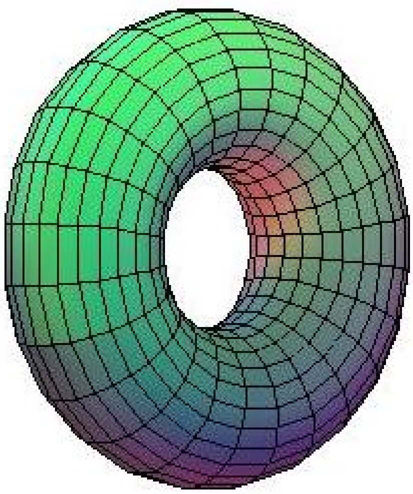
Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí.

Vztah $V=\pi\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx$ *je evidentně nesprávný!*

Příklad 3.3.4. Vypočtěte objem rotačního anuloidu.

Řešení:

Anuloid (torus), viz obr. 3.3.7, je těleso vytvořené rotací kruhu kolem přímky ležící v rovině tohoto kruhu a neprotínající kruh.



Obr. 3.3.7. Anuloid