



## 13. cvičení – Určitý integrál 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Věta 1.** • Necht'  $a, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < c$ ,  $b \in (a, c)$ . Pokud  $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$  a  $f$  je **spojitá** v  $b$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, c)$  a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

• Necht'  $a, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < c$ ,  $b \in (a, c)$ . Pokud  $f \in \mathcal{N}(a, c)$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$  a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

**Poznámka 2.** Necht'  $I \subset \mathbb{R}$  je interval a necht'  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Řekneme, že  $f$  je *darbouxovská*, jestliže pro každé  $a, b \in M$ ,  $a < b$ , a pro každé  $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$  existuje  $c \in [a, b]$ , takové, že  $f(c) = y$ .

### Příklady

Spočtete Newtonovy integrály:

1.  $\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

2.  $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1} dx$

3.  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$

4.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 3} dx$

5.  $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

7.  $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$

8.  $\int_0^1 \arccos^2 x dx$

9.  $\int_0^1 x \arcsin x dx$

10.  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

11.  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

12.  $\int_4^\infty \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-2}{x-4}} dx$

13.  $\int_0^{4\pi} \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$

14.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} dx$

## Zkouškové příklady

doc. Rokyty: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

prof. Spurného: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

$$15. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x + \cos x} dx$$

$$16. \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx$$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2} dx$$

$$18. (R) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)} dx$$

$$19. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$$

$\frac{x}{1+x} \wedge = t \quad (11)$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \wedge = t \quad (12)$	$t \sin x = x \quad (6)$
$\frac{x}{1+x} \wedge = t \quad (13)$	$\frac{x}{1+x} \wedge = t \quad (10)$	$t \cos x = x \quad (8)$
$\frac{x}{1+x} \wedge = t \quad (14)$		$ x \sin x  \wedge = (9)$
$\frac{x}{1+x} \wedge = t \quad (15)$		$(x2) \sin \frac{x}{2} = x \cos x \quad (5)$