11. cvičení – Odmocniny

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. typ $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right)$

   (a) $g(x) = \dfrac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

   Řešení:
   Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Pak platí vztah $t^6 = x$. Potom pro substituci 1. typu

$$\mathrm{d}t = \left(x^{1/6}\right)' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^{-5/6}\,\mathrm{d}x$$

   (Pozn.: Pro 2. větu o substituci bychom měli $t^6 = x$, tedy $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$.) Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\cdot\frac{6x^{5/6}}{6x^{5/6}}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t.$$

   Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t+1)(2t^2-t+1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

   Přenásobením jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

   Dosazením $t=0$ a $t=-1$ dostaneme, že $A=1$ a $B=-\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A+2B+C=0$, tedy $C=-2A-2B=-\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B+D=0$, tedy že $D=-B=\frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{8}\frac{6t-1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

   Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8}\frac{6t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\frac{1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

   První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý převodem na čtverec Kombinací všech výsledků dostaneme

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x \to 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t$$

$$\stackrel{C}{=} 6\ln t - \frac{3}{2}\ln(1+t) - \frac{9}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

$$\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln x - \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}.$$

Lze ještě upravit jako

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$$

Původní funkce je spojitá (a definovaná) na $(0,\infty)$ - tam budeme hledat primitivní funkci.
Při 1. větě o substituci máme $\varphi(x) = \sqrt[6]{x}$, $\varphi' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ a $f(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$.
Interval $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$ a $\varphi(\alpha,\beta) = (0,\infty)$.
Funkce f má primitivní funkci na $(-\infty,0)$ nebo $(0,\infty)$. Zvolme $(a,b) = (0,\infty)$. Pak $\varphi(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$.
Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = t^6$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$. $\varphi' = 6t^5$. Dále $f(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$. Nakonec

$$G(t) = 6\ln t - \frac{3}{2}\ln(1+t) - \frac{9}{4}\ln\left(2t^2 - t + 1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

Intervaly: $t \in (\alpha,\beta) = (0,\infty)$ a $\varphi(\alpha,\beta) = (0,\infty) = (a,b)$.
Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α,β). Výsledný integrál pak máme na $(a,b) = (0,\infty)$.

(b) $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení:
Použijeme substitutci $t = \sqrt[6]{x+1}$. Potom $\mathrm{d}x = 6t^5\ \mathrm{d}t$ a

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\ \mathrm{d}x \to \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\ \mathrm{d}t.$$

Protože

$$(-t^8+t^5) : (t^2+1) = -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\ \mathrm{d}t = 6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\ \mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(1+t^2) - 6\arctan t,$$

$$\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7 + \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5 + \frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4 - 2(\sqrt[6]{x+1})^3 - 3(\sqrt[6]{x+1})^2$$

$$+6(\sqrt[6]{x+1}) + 3\ln(1+(\sqrt[6]{x+1})^2) - 6\arctan(\sqrt[6]{x+1})$$

Pro $x \in (-1,\infty)$.

(c) $g(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$. Potom

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{4} x^{-3/4} \,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \to \int \frac{4t^3}{(1+t)^3 t^2} \,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3} \,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2 + B(1+t) + C,$$

odkud dosazením $t = -1$ dostáváme, že $C = -4$. Dále máme, že

$$4t = (A + B + C) + (2A + B)t + At^2,$$

odkud ihned máme, že $A = 0$ a $B = 4$. Tudíž

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3} \,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{4}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3} \right) \,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2}$$

$$= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} \to \int g(x) \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}.$$

Pro $x \in (0, \infty)$.

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

   (a) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

   Řešení: Definičním oborem funkce g je interval $[1, +\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1, +\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu. Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

   a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

   odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \,\mathrm{d}t = \frac{-4t}{(1-t^2)^2} \,\mathrm{d}t.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{(t+1)^3}-\frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

a po integraci

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|t+1|$$

zbývá dosadit za t:

$$\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}+\frac{1}{(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1)^2}-\frac{1}{2}\ln\left|1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|$$

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$ $\varphi'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
Dále $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(1-t^2)^2}$
Nakonec

$$G(t) = -\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|t+1|$$

Intervaly: $t \in (\alpha,\beta) = (1,\infty)$ a $\varphi(\alpha,\beta) = (1,\infty) = (a,b)$.
Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α,β). Výsledný integrál pak máme na $(a,b) = (1,\infty)$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

Řešení:
Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}, \qquad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2(1-t^3)+3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3}-1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6}\cdot t^2\cdot\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{2t^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{3}{2t} \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(c)

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x}$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

tedy

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \to \int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$2\arctan t - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|$$

Pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

(a)

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}$$

Řešení: Příklad i s řešením máme z http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html

Podmínky: $-x^2+x = 2 \geq 0$, tedy $x \in (-1, 2)$ (integrujeme na otevřeném intervalu). Zároveň máme 2 různé reálné kořeny, tedy výraz upravíme

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(2-x)(x+1)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}}\,\mathrm{d}x$$

Zvolme substituci

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

Pak

$$x = \frac{2-t^2}{t^2+1}$$

a

$$\mathrm{d}x = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Máme

$$\to \int \frac{1}{1+\left(\frac{2-t^2}{t^2+1}+1\right)t}\cdot\frac{-6t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-6t}{(1+t^2)(t^2+3t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{-2}{1+t^2} + \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2t+3+\sqrt{5}}$$

$$\overset{C}{=} -2\arctan t - \frac{4\sqrt{5}}{5}\log|2t+3+\sqrt{5}| - \frac{4\sqrt{5}}{5}\log|-2t-3+\sqrt{5}|$$

$$\to \int \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\log\left|2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+3+\sqrt{5}\right| - \frac{4\sqrt{5}}{5}\log\left|-2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}-3+\sqrt{5}\right|$$

$x \in (-1,2)$

4. Ostatní

(a) $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Řešení:
Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x}+\sqrt{1+x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \qquad \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

a máme

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)$$

$$\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}-\ln|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}|-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}+(\sqrt{1+x})^2}\right).$$

Pro $x \in (0,\infty)$.