7. cvičení – 2. věta o substituci

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. Směs

   (a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$
   Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt{x}$. Intervaly $x \in (0,\infty)$, $y \in (0,\infty)$. Pak $y^2 = x$ a $2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Potom

   $$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \to \int 2y\sin y\ \mathrm{d}y$$

   Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2y$, $u' = \sin y$. Pak $v' = 2$, $u = -\cos y$. Máme

   $$\int 2y\sin y\ \mathrm{d}y = -2y\cos y + 2\int \cos y\,\mathrm{d}y = -2y\cos y + 2\sin y + c$$

   Zpětně zasubstituujeme a dostaneme

   $$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c.$$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$
   Řešení: Substituce $y = \sqrt{4x-7}$. Intervaly $x \in (\frac{7}{4},\infty)$, $y \in (0,\infty)$.
   Pak $(y^2+7)/4 = x$ a $y/2\,\mathrm{d}y = dx$. Pak

   $$\int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{5}{y+3}\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int \frac{y}{y+3}\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int 1 - \frac{3}{y+3}\,\mathrm{d}y =$$
   $$\frac{5}{2}(y - 3\ln|y+3|) + c \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{5}{2}(\sqrt{4x-7} - 3\ln|\sqrt{4x-7}+3|) + c$$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
   Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+e^x}$. Intervaly $x \in \mathbb{R}$, $y \in (1,\infty)$. Pak $e^x = y^2-1$, tedy $x = \ln(y^2-1)$. Dopočteme $\mathrm{d}x = \frac{2y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y$. Odtud máme

   $$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{y}\frac{2y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|$$

   $$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right|$$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt[6]{x}$. Intervaly $x \in (0, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Pak $y^6 = x$ a $6y^5 \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Máme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x \to \int \frac{y^3}{1+y^2} 6y^5 \, \mathrm{d}y = 6 \int \frac{y^8}{1+y^2} \, \mathrm{d}y =$$

Provedeme dělení mnohočlenů a získáme

$$6 \int \frac{y^8}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = 6 \int y^6 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = 6 \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} - y + \arctan y \right) + c$$

Vrátíme substituci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x = 6 \left(\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/6} + \arctan x^{1/6} \right) + c$$

2. Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   Řešení: Zvolme substituci $x = 2\cos t$. Pak $\mathrm{d}x = -2\sin t \, \mathrm{d}t$ a $4 - x^2 = 4(1 - \cos^2 t) = 4\sin^2 t$. Intervaly budou: $t \in (0, \pi)$, pak $x \in (-2, 2)$. Navíc $-2\sin t \neq 0$ na $(0, \pi)$ a funkce $2\cos t$, $t \in (0, \pi)$ je na (surjekce). Dostáváme

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x \to \int \sqrt{4\sin^2 t} (-2\sin t) \, \mathrm{d}t = \int -4|\sin t| \sin t \, \mathrm{d}t$$

   Protože jsme na intervalu $(0, \pi)$, tak $|\sin t| = \sin t$ a

$$\int -4|\sin t| \sin t \, \mathrm{d}t = -4 \int \sin^2 t \, \mathrm{d}t.$$

   Poslední integrál lze vyřešit per partes nebo přepisem $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$. Pak

$$-4 \int \sin^2 t \, \mathrm{d}t = -4 \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t = -4 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + c$$

   Celkem tedy pro $x \in (-2, 2)$ máme

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x = -4 \left(\frac{\arccos(x/2)}{2} - \frac{\sin(2\arccos(x/2))}{4} \right) + c$$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

   Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1, 1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1, 1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$\mathrm{d}x = \cos t \ \mathrm{d}t,$$

   a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} \ \mathrm{d}x \to \int \frac{1}{(1 - \sin^2 t)^{3/2}} \cos t \ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t \ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t} \stackrel{C}{=} \tan t$$

   a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, dostaneme

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$, $a > 0$

Řešení: Z podmínek na integrand máme $x \in (-a, a)$. Použijeme substituci $x = a \sin t$. Intervaly budou $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Navíc $\mathrm{d}x = a \cos t \, \mathrm{d}t$.
Potom

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, \mathrm{d}x = \int a \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t \ \mathrm{d}t \to \int a \sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int a(1+\sin t) \ \mathrm{d}t \overset{C}{=} at - a\cos t \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, $a > 0$

Řešení: Lze použít substituci $a \sinh t$, ale ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a \operatorname{tg} t$. Intervaly: $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t$ a s přihlédnutím ke vztahu $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x \to \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{a^2} \cos t \ \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t \to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \to \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

3. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Intervaly: $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Potom $\mathrm{d}x = a \cosh t \ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{a^2+x^2} \ \mathrm{d}x \to \int a^2 \cosh^2 t \ \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2} (t + \cosh t \sinh t)$$

$$\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2}$$

Integrál $\int \cosh^2 t$ lze spočítat rozepsáním do $\int \frac{1}{4}(e^{-2t} + e^{2t} + 2)$, pomocí per partes nebo pomocí vzorce $\cosh^2 t = (1 + \cosh(2t))/2$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a > 0$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Intervaly $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Potom $\mathrm{d}x = a \cosh t \ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \ \mathrm{d}x \to \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t \ \mathrm{d}t = a^2 \int \sinh^2 t \ \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2} [t - \sinh t \cosh t]$$

$$\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{a^2}{2} \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2}$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2}\cosh t$. Intervaly: $x \in (\sqrt{2}, \infty)$, $t \in (0, \infty)$. Potom $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sinh t \, \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} \,\mathrm{d}x \to \int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2}\sinh t} \sqrt{2}\sinh t \,\mathrm{d}t = \int 2\cosh^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} (t + \sinh t \cosh t)$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} \overset{C}{=} \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}$$

Pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$, uvažujme substituci $x = -\sqrt{2}\cosh t$, $t \in (0, \infty)$. Pak

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} \,\mathrm{d}x \to \int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2}\sqrt{\sinh^2 t}} (-\sqrt{2}\sinh t)\,\mathrm{d}t = -\int 2\cosh^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -(t + \sinh t \cosh t)$$

Vyjádříme $-\frac{x}{\sqrt{2}} = \cosh t$, tedy $t = \operatorname{arg\,cosh} -\frac{x}{\sqrt{2}}$.
Navíc $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$, tedy $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$.
Tedy

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\operatorname{arg\,cosh} -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} \overset{C}{=} -\ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}$$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$

Řešení:
Použijeme substituci $x = a\cosh t$. Pracujeme na intervalech $x \in (a, \infty)$ a $t \in (0, \infty)$.
Potom $\mathrm{d}x = a\sinh t \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \,\mathrm{d}x \to \int a^2 \sinh^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}(\cosh t \sinh t - t)$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}a^2 \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Pro interval $x \in (-\infty, -a)$ uvažujme substituci $x = -a\cosh t$ a $t \in (0, \infty)$. Pak dostaneme

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \,\mathrm{d}x \to \int -a^2 \sinh^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{a^2}{2}(\cosh t \sinh t - t)$$

Vyjádříme $-\frac{x}{a} = \cosh t$, tedy $t = \operatorname{arg\,cosh} -\frac{x}{a}$.
Navíc $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$, tedy $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$.
Tedy

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \overset{C}{=} \frac{a^2}{2} \operatorname{arg\,cosh} -\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}$$

Jiný přístup pro $x \in (-\infty, -a)$: Lze ukázat, že jestliže f je sudá, tak lze najít primitivní funkci $F(x)$, která bude lichá. (Pozor, obecně jakákoli taková F lichá být nemusí, záleží na konstantě $+C$.) Pak stačí vyjádřit F tak, aby byla lichá.