7. cvičení – 2. věta o substituci

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. ❄ Směs

   (a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

2. ❀ Goniometrické substituce

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$, $a > 0$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, $a > 0$

Bonus

3. ♡ Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $a > 0$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$

(1a) $y\sqrt{x}$, tedy $y^2 = x$
(1b) $y = \sqrt{4x - 7}$, tedy $x = (y^2 + 7)/4$
(1c) $y = \sqrt{1 + e^x}$, tedy $x = \ln(y^2 - 1)$
(1d) $y = \sqrt[6]{x}$, tedy $y^6 = x$

(2a) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(2b) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(2c) $x = a \sin t$ nebo...
(2d) $x = a \sinh t$ nebo $a \tan t$

(3a) $x = a \sinh t$
(3b) $x = a \sinh t$
(3c) $x = \sqrt{2} \cosh t$
(3d) $x = a \cosh t$