



6. cvičení – Substitute a Per partes 2 + lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. (a) $\int \arctan x \, dx$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

Substituce $y = 1 + x^2$.

$$- \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \, dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log |y| \rightarrow - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Tedy dohromady

$$\int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$x \in \mathbb{R}$
(b) $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} \, dx \rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$.

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k , dostáváme celkem $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\int \cotg x \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \cotg x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} \log |y| \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \ln |\sin x|$$

Funkce $\cot x$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k , dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(d) \int x \log \frac{1+x}{1-x} dx$$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \log \frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{2}{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} \int x \log \frac{1+x}{1-x} dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} - \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

$x \in (-1, 1)$

$$(e) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx &\rightarrow \int \frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} y^{2/3} \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} \end{aligned}$$

Funkce $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$ je definována na $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x - \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (0, \sqrt{2})$ pro sudá k a Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (-\sqrt{2}, 0)$ pro lichá k .

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ má primitivní funkci na intervalech $(a, b) = (0, \infty)$ (ten vezmeme pro sudá k) nebo na $(a, b) = (-\infty, 0)$ (ten pro lichá k). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k , dostáváme celkem $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Není potřeba najít přesně interval $(0, \sqrt{2})$, důležité je jen ověřit vztah $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$.)

$$(f) \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \stackrel{C}{=} 2 \arcsin y$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arcsin \sqrt{x}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(0, 1)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x}$ a $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Pak $\sqrt{((0, 1))} = (0, 1)$.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$. Protože $\sqrt{((\alpha, \beta))} \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, 1)$.

(g) $\int x^2 e^{-2x} dx$

Řešení:

První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} \right] + \int x e^{-2x} dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x} \right] + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4} \int e^{-2x}$$

$x \in \mathbb{R}$

(h) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin x} \cos x dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1 - y^2}{y} dy = \int \frac{1}{y} dy - \int y dy \stackrel{C}{=} \log |y| - \frac{y^2}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln |\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin x}$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).

Funkce $f = \frac{1-y^2}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $-\infty, 0)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k , dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \rightarrow \int \frac{1}{y^2-1} dy = - \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{1 - \sqrt{x^2 + 1}} \right|$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(0, \infty)$ a $(-\infty, 0)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x^2 + 1}$ a $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$ (v obou případech).

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(1, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, \infty)$ i pro $x \in (-\infty, 0)$.

(j) $\int x \arctan x dx$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

(k) $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= \left[x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{C}{=} \\ &= x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1 + x^2$.

$x \in \mathbb{R}$

(l) $\int \sin(\log x) dx$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\log x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\log x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\log x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\log x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$\begin{aligned} 2 \int 1 \cdot \sin(\log x) &\stackrel{C}{=} x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) \\ \int \sin(\log x) &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) \end{aligned}$$

$x \in (0, \infty)$

$$(m) \int x^n \log x \, dx, \quad n \neq -1$$

Řešení:

Položme $u' = x^n$, $v = \log x$. Potom $u = x^{n+1}/n+1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \log x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \, dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$x \in (0, \infty)$

$$(n) \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

Řešení:

Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x) \, dx = \int 0 \, dx \stackrel{C}{=} 1$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

$x \in \mathbb{R}$

2. (a) $f(x) = |x|$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0), \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{2} + c_1 = c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} + c_2 = c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, & x = 0, \\ \frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in (-1, 1), \\ x^2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c_1, & x \in (-\infty, -1), \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ \frac{x^3}{3} + c_3, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 , c_2 a c_3 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{3} + c_1 = -\frac{1}{3} + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = -\frac{2}{3} + c_2.$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{3} + c_3 = \frac{1}{3} + c_3$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + c_2 = 1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_3 = \frac{2}{3} + c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + c_2, & x \in (-\infty, -1), \\ -1 + c_2, & x = -1, \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ 1 + c_2, & x = 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + c_2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in (-\infty, 0), \\ x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{4} + c_2 = c_2$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^4}{4} + c_1 = c_1$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, & x = 0, \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0), \\ e^{-x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ -e^{-x} + c_2, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x + c_1 = 1 + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$2 + c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 + c_1, & x = 0, \\ -e^{-x} + 2 + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(e) $f(x) = |\sin x|$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ -\sin x, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \cos x + B_k, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^+} -\cos x + A_k = -1 + A_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^-} \cos x + B_{k-1} = 1 + B_{k-1}.$$

Dostáváme

$$-1 + A_k = 1 + B_{k-1}.$$

Analogicky

$$\lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^+} \cos x + B_k = -1 + B_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^-} -\cos x + A_k = 1 + A_k.$$

Dostáváme

$$1 + A_k = -1 + B_k.$$

Dohromady

$$\begin{aligned} B_{k-1} + 2 &= A_k \\ B_k &= 2 + A_k \\ B_k &= 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} B_k &= B_0 + 4k \\ A_k &= B_0 + 4k - 2 \end{aligned}$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} B_0 + 4k - 3, & x = 0 + 2k\pi, \\ -\cos x + B_0 + 4k - 2, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ 4k - 1 + B_0, & x = \pi + 2k\pi, \\ \cos x + 4k + B_0, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

(f) $f(x) = |\sin x + \cos x|$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + \sin x + A_k, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ \cos x - \sin x + B_k, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} \cos x - \sin x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} -\cos x + \sin x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} -\cos x + \sin x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} \cos x - \sin x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$2\sqrt{2} + B_{k-1} = A_k$$

$$2\sqrt{2} + A_k = B_k$$

$$4\sqrt{2} + B_{k-1} = B_k$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -3\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\cos x + \sin x - 2\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \cos x - \sin x + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

(g) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém \mathbb{R} , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$$

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} \cos - \sin x, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\cos x + \sin x, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + A_k, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x + B_k, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} -\sin x - \cos x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} \sin x + \cos x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} \sin x + \cos x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} -\sin x - \cos x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$2\sqrt{2} + B_{k-1} = A_k$$

$$2\sqrt{2} + A_k = B_k$$

$$4\sqrt{2} + B_{k-1} = B_k$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -3\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\sin x - \cos x + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$