



5. cvičení – Substitute a Per partes

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

1. Substitute

(a) $\int \sin^5 x \cos x \, dx$.

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx \rightarrow \int y^5 \, dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{\sin^6 x}{6}$$

Funkce $\sin^5 x \cos x$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$.

Funkce $f = y^5$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int -2xe^{-x^2} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x \, dx$ a platí

$$\int -2xe^{-x^2} \, dx \rightarrow \int e^y \, dy \stackrel{C}{=} e^y \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} e^{-x^2}$$

Funkce $-2xe^{-x^2}$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = -x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $-x^2((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0]$.

Funkce $f = e^y$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x \, dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

Funkce $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = 1 + x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [1, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

$$(d) \int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\arcsin x}$$

Funkce $\frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \arcsin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \frac{\pi}{2})$.

Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

- Pro substituci máme $\varphi = \arcsin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Funkce $f = \frac{1}{y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, 0)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 0), (0, 1)$

2. Per partes

$$(a) \int x \cos x dx$$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x \cos x dx = [x \sin x] - \int \sin x dx \stackrel{C}{=} x \sin x + \cos x$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce $\cos x$ a 1 jsou na I spojitě.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

$$(b) \int x e^{-x} dx$$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x e^{-x} dx = [-x e^{-x}] - \int -e^{-x} dx \stackrel{C}{=} -x e^{-x} - e^{-x}$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{-x} a 1 jsou na I spojitě.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

$$(c) e^x \sin x dx$$

Řešení:

Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$2 \int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^x , $\sin x$ a $\cos x$ jsou na I spojité.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

3. Směs

(a) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx \rightarrow - \int \sin y \, dy \stackrel{C}{=} \cos y \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \cos \frac{1}{x}$$

Funkce $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ je definována na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \frac{1}{x}$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, 0)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$.
Funkce $f = \sin y$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \frac{1}{x}$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.
Funkce $f = \sin y$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$.

(b) $\int \ln x \, dx$

Řešení:

Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1 \, dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} x \ln x - x$$

Pracujeme na intervalu $I = (0, \infty)$, funkce $\frac{1}{x}$ a 1 jsou na I spojité.

Závěr: $x \in (0, \infty)$

$$(c) \int \frac{e^x}{2+e^x} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2+e^x} dx \rightarrow \int \frac{dy}{2+y} \stackrel{C}{=} \ln|2+y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln(2+e^x)$$

Funkce $\frac{e^x}{2+e^x} dx$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$. Funkce $f = \frac{1}{2+y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-2, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

$$(d) \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy \stackrel{C}{=} \ln|y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln(|\ln(\ln x)|)$$

Funkce $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ je definována na $(1, e)$ a (e, ∞) , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \log(\log x)$, interval $(\alpha, \beta) = (1, e)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$.

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, 0)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

- Pro substituci máme $\varphi = \log(\log x)$, interval $(\alpha, \beta) = (e, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (1, e), (e, \infty)$.

$$(e) \int \arcsin x dx$$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \arcsin x dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, $dy = -2x dx$.

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$

Tedy

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu $I = (-1, 1)$, funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a 1 jsou na I spojité.
 Substitute: Funkce $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 1)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = 1 - x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$.
 Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 1)$

$$(f) \int \frac{x}{3-2x^2} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = 3 - 2x^2$. Potom $dy = -4x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2} dx \rightarrow -\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |3-2x^2|$$

Funkce $\frac{x}{3-2x^2}$ je definována na $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = 3 - 2x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$.
 Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, 0)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 3 - 2x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 3]$.
 Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 3 - 2x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$.
 Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, 0)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$.

$$(g) \int x^2 \sin 2x dx$$

Řešení:

První per partes: $u' = \sin 2x$, $u = -\frac{1}{2} \cos 2x$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right] + \int x \cos 2x =$$

Druhé per partes: $u' = \cos 2x$, $u = \frac{1}{2} \sin 2x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right] - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce $\sin 2x$, $2x$, $\cos 2x$ a 1 jsou na I spojité.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

$$(h) \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x) \, dx = \int 1 \, dx \stackrel{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{ax} , $\sin(bx)$ a $\cos(bx)$ jsou na I spojité.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

$$(i) \int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx$$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \cotg x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx \rightarrow - \int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} y^{3/4} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cotg^3 x}$$

Funkce $\frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}}$ je definována na $(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cotg x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

$$(j) \int \cos(\ln x) \, dx$$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položíme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

Pracujeme na intervalu $I = (0, \infty)$, funkce $-\sin(\log x) \frac{1}{x}$, $\cos(\log x) \frac{1}{x}$ a 1 jsou na I spojité.

Závěr: $x \in (0, \infty)$

(k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x^2$, pak $dy = -2x dx$. Dostaneme

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow x \int \frac{1}{-2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\frac{1}{2} 2\sqrt{y} + c$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\sqrt{1-x^2} + c$$

Funkce $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 1)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = 1 - x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$. Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 1)$.

(l) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Na poslední integrál použijeme substituci $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$:

$$-\int \frac{1}{1-y^2} dy = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

tedy celkem

$$\stackrel{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right|$$

Per partes: Pracujeme na intervalech $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, funkce $\sin x$ a $\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ jsou na I_k spojité.

Původní funkce $\sin x \ln(\operatorname{tg} x)$ je definována na $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$.

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

$$(m) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \rightarrow \int y dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\arctan^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \arctan x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce $f = y$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

$$(n) \int x^2 \arccos x dx$$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \arccos x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2 \arccos x dx = \left[\frac{x^3}{3} \arccos x \right] + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, odkud plyne $dy = -2x dx$ a $x^2 = 1 - y$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} &\rightarrow \frac{1}{6} \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{6} \int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^{1/2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/2}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu $I = (-1, 1)$, funkce x^2 a $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jsou na I spojité.

Substituce: Funkce $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 1)$ na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = 1 - x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$. Funkce $f = \frac{y-1}{\sqrt{y}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 1)$

$$(o) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \stackrel{C}{=} 2y^{-1/2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

Funkce $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{y^3}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

(p) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x \right] - \int \frac{4}{3}x^{1/2} \ln x dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{4}{3}x^{1/2}$, $u = \frac{8}{9}x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x \right] - \left[\frac{8}{9}x^{3/2} \ln x \right] + \int \frac{8}{9}x^{1/2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{3}x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9}x^{3/2} \ln x + \frac{16}{27}x^{3/2}$$

Pracujeme na intervalu $I = (0, \infty)$, funkce \sqrt{x} , $2 \log x \cdot \frac{1}{x}$, $\frac{4}{2}\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ jsou na I spojitě.

Závěr: $x \in (0, \infty)$

(q) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln x$. Pak $dy = \frac{1}{x} dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx \rightarrow \int y^2 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\ln^3 x}{3}$$

Funkce $\frac{\ln^2 x}{x}$ je definována na $(0, \infty)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \log x$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = \mathbb{R}$.

Funkce $f = y^2$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (0, \infty)$.

(r) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int ye^{-y} dy$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \frac{1}{2} [-ye^{-y}] + \frac{1}{2} \int e^{-y} dy \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} - ye^{-y} - \frac{1}{2}e^{-y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

Substituce: Funkce $x^3e^{-x^2}$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$.

Funkce $f = ye^{-y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Per partes: Pracujeme na intervalu $I = \mathbb{R}$, funkce e^{-y} a 1 jsou na I spojité.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$

(s) $\int \operatorname{tg} x dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \operatorname{tg} x dx \rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\ln |\cos x|$$

Funkce $\tan x$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$.

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

(t) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

Řešení: Pracujeme na intervalu $x \in (0, \infty)$. Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &\rightarrow 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \stackrel{C}{=} 2 \arctan y \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arctan \sqrt{x} \end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ je definována na $(0, \infty)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{x}$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.

Funkce $f = \frac{1}{1+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (0, \infty)$.

(u) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \arctan e^x$$

Funkce $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$. Funkce $f = \frac{1}{1+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(v) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{1 - y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{\sin x}$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$.

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.

(w) $\int \cos^3 x dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x dx$ a platí

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \rightarrow \int (1 - y^2) dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

Funkce $\cos^3 x$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$.

Funkce $f = 1 - y^2$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(x) $\int \frac{x}{4 + x^4} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4 + x^4} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4 + y^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dy}{1 + (y/2)^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$$

Funkce $\frac{x}{4+x^4}$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = x^2$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$. Funkce $f = \frac{1}{2} \frac{1}{4+y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

$$(y) \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \rightarrow \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{1+y^2}}$$

pak výraz rozšíříme, abychom mohli použít substituci $t = 1 + y^2$, $dt = 2y dy$:

$$= \int \frac{dy}{y \sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2 \sqrt{1+y^2}} dy \rightarrow \int \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}} dt.$$

Nyní substituujeme $s = \sqrt{t}$, pak $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Nakonec použijeme tabulkový integrál:

$$\int \frac{1}{s^2-1} dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|.$$

Nakonec vrátíme substitute:

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right| \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} \right| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \left| \ln \frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}} \right|$$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = e^x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$.
Funkce $f = \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = 1 + y^2$, interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$.
Funkce $f = \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (1, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $y \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{t}$, interval $(\alpha, \beta) = (1, \infty)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$.
Funkce $f = \frac{1}{s^2-1}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (1, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

$$(z) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

Řešení: Per partes: $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \arcsin x \right] + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce $y = \sqrt{1-x^2}$. Potom $dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ a $x^2 = 1-y^2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &\rightarrow \int \frac{-1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x} \arcsin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right| \end{aligned}$$

Per partes: Pracujeme na intervalech $I = (-1, 0)$, $(0, 1)$, funkce $\frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jsou na I spojité.

Substituce: Funkce $\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je definována na $(-1, 0)$, $(0, 1)$, na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{1-x^2}$, interval $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$.
Funkce $f = \frac{-1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.
- Pro substituci máme $\varphi = \sqrt{1-x^2}$, interval $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$. Platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$.
Funkce $f = \frac{-1}{1-y^2}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in (-1, 0)$, $(0, 1)$