4. cvičení – Primitivní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Poznámka 4. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f.

Hinty

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} \qquad a^b = e^{b \ln a} \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Příklady

1. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

   (a) $f(x) = x^{13}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   (e) $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

   (f) $f(x) = 7\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{2}{1+x^2}$

   (g) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - e^x$

   (h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} + 1 + x^2$

   (i) $f(x) = \sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   (j) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{3x}$

   (k) $f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)$

   (l) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

3. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

   (a) $f(x) = \cos(3x)$

   (b) $f(x) = \sin(2x - \pi)$

   (c) $f(x) = e^{5-3x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-4x}$

(f) $f(x) = (2x+1)^7$

(g) $f(x) = e^{3x} + \dfrac{7}{x}$

(h) $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$

(i) $f(x) = (3 - x^2)^3$

(j) $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + (3x+7)^5$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

(m) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-2x^2}}$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{x+A}$

4. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) ❄ $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1} + \dfrac{4}{1-\cos^2 x}$

(b) ✿ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}$

(c) $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$

(d) ♡ $f(x) = \tan^2 x$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

(g) $f(x) = (2^x + 3^x)^2$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2+3x^2}$

(i) $f(x) = \operatorname{cotg}^2 x$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$

(k) $f(x) = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^3}{x^3}\right),\ a \in \mathbb{R}$

5. Najděte takovou funkci, aby $f'(x) = 6x(1-x)$ a $f(0) = 1$.

6. Najděte chyby

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 e^x + c$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x \arcsin x + c$

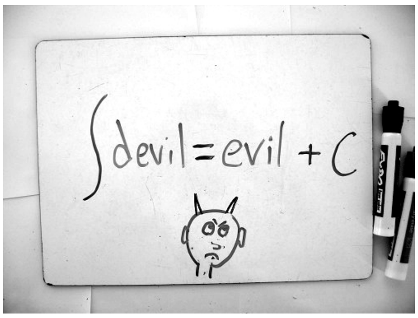

Figure 1: https://mathwithbaddrawings.com/2013/05/27/calculus-joke/

(4a) $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$

(4b) $4 - (3x-1)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2\right)$

(4d) $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$