3. cvičení – Taylorův polynom a limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

   Řešení: Taylorův rozvoj:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

   (Šlo by i provést dvakrát l'Hospitalovo pravidlo.)

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0$

   Řešení: Převedeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$\overset{AL}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} + \frac{o(x^4)}{x^2}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^4} \cdot x^2\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \overset{AL}{=} (0 + 0 \cdot 0) \cdot 1 = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \dfrac{19}{90}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \dfrac{4}{3}$

Řešení: Nejprve použijeme známou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1.$$

Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x}$$

Druhý zlomek jde do 1. První limitu spočteme pomocí Taylora.
Rozvineme čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x = 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3)$$

$$= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{4}{3} + 0.$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x} \overset{AL}{=} \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \dfrac{1}{9}$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

napíšeme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8}$$

Poslední zlomek vyřešíme Taylorem. Rozvineme čitatel

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} \cdot \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{36}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} \overset{AL}{=} 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \ln^2 a,\ a > 0$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = \dfrac{1}{3}$

Řešení: Nejprve převedeme na společný jmenovatel, pak rozvineme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} =$$

Díky známým limitám víme, že jmenovatel se chová jako x^3, tedy budeme rozvíjet do třetího řádu.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) \cdot \frac{x}{\sin x} \overset{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0\right) \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$

Řešení:

Rozvojem do 3. řádu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3/6 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{1}{1/6 + \frac{o(x^3)}{x^3}} \overset{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{6} + 0}\right) = 2$$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = -\dfrac{1}{4}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{(-x^2)} = 1,$$

dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)}$$

První zlomek rozvineme do 5. řádu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

Dohromady

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)} \overset{AL}{=} -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \arctan x - x} = -\dfrac{1}{11}$

Řešení: Z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x-\operatorname{tg}x-x}{2\sin x-\arctan x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-x+o(x^6)}{2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)-x+o(x^6)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{20}x^5-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}}=-\frac{1}{11}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$(\cos x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(\cos x)}=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(\ln(1-x^2/2+o(x^3))}=$$

$$=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(-x^2/2+o(x^3))}=e^{-x^3/2+o(x^3)}=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^3/2+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Zkouškové příklady

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x)=\arctan(\sin x)-\sin\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x=0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x)-\arctan x}$$

Řešení: Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html

Máme

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5),$$
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5).$$

Tedy

$$\arctan(\sin x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)^3$$
$$+\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)^5+o\left(\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)^5\right)$$
$$=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^5+o(x^5).$$

Dále

$$\sin\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^3+\frac{1}{120}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^5+o\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^5$$
$$=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{40}x^5+o(x^5).$$

Dohromady

$$T_5^{f,0} = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále rozvineme jmenovatele. Platí

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arcsin x \cdot \cos x - \arctan x &= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Pro limitu pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}{-\frac{1}{6}x^5 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^5)}{x^5}} = -\frac{6}{5}$$

(b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = 1.$$

Řešení: Rozvineme odmocniny do 2. řádu

$$\sqrt{1-2x} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}}{2}(-2x)^2 + o((-2x)^2)$$
$$\sqrt[3]{1-3x} = 1 + \frac{1}{3}(-3x) + \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}}{2}(-3x)^2 + o((-3x)^2)$$

Dohromady pro čitatele máme

$$x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x} = \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Pro jmenovatele je pro $a \neq 0$

$$x - a\sin\frac{x}{a} = x - a\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{a^3} + o\left(\frac{x^3}{a^3}\right)\right) = \frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)$$

Limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6a^2} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = 3a^2$$

Tedy řešíme rovnici $3a^2 = 1$, odtud

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

(c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
Řešení: Rozviňme do 4. řádu:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2)\\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\ e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1}\\ &= e\Bigg(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2}{2}\\ &\quad + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3}{6} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4}{24}\\ &\quad + o\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4\Bigg)\\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Pro $a = e$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{e}{8}$$

Pro $a > e$ je dle věty o nevlastní limitě podílu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \infty.$$

Analogicky pro $a < e$ je

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\infty.$$

(d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.
Řešení: Platí

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + +o(x^4),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2).$$

Odtud

$$\cos(\arctan x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2,$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$
$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2.$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

Pro limitu tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4}$$

Aby byla limita vlastní, musí být $a = 0$. Pak dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

(e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.
Řešení: Pro $a, b \neq 0$ máme rozvoj

$$\cos ax = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4x^4}{24} + o(x^2).$$
$$\arctan bx = bx - \frac{1}{3}b^3x^3 + o(x^4),$$

Limita pak je tvaru

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-b) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{a^4 - 8b^3}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Aby limita existovala vlastní, musí platit

$$1 - b = 0$$
$$b - \frac{a^2}{2} = 0,$$

tedy $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$.
Pro tyto hodnoty pak je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4-8}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

Dále, uvažujme $b = 1$, $a \neq \pm\sqrt{2}$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(x) - 1}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{a^4-8b^3}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} \\
&\overset{AL}{=} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\infty + \frac{a^4 - 8b^3}{24} + 0 = \begin{cases} \infty, & a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ -\infty, & a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Nechť nyní $b \neq 1$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-b) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{a^4-8b^3}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \cdot \left((1-b) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2\right) + \frac{a^4 - 8b^3}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \\
&\overset{AL}{=} (1-b)\infty + \frac{a^4 - 8b^3}{24} + 0 = \begin{cases} \infty, & b < 1, \\ -\infty, & b > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Závěr: Limita existuje vlastní právě pro $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$ a rovná se $-\frac{1}{6}$.