3. cvičení – Taylorův polynom a limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Trochu jako u L'Hospitala: Pokud je to nutné, převedeme na **jeden zlomek**. Pokud to lze, použijeme **známé limity** - tím zjednodušíme výraz.
2. Odhadneme, do jakého **řádu** budeme rozvíjet. Nápověda:
   (a) Stupeň ve jmenovateli.
   (b) Rozvíjíme do takového stupně, aby nám zbyla nějaká x (nesmí se nám všechno „požrat").
3. **Rozvineme**. Nezapomeneme na opatrnou práci s óčky.
4. **Vytkneme** nejvyšší člen. Dopočteme.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$
   (d) ✽ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$
   (f) ❀ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$
   (g) ♣ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$
   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$
   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$
   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x}$
   (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Zkouškové příklady

2. Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html
   (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$
   (b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = 1.$$

(c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.

(e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.

(1d) Prve na společný jmenovatel.

(1f) Nejprve použijeme známou limitu $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$.

(1g) Nejprve použijeme známé limity.

(2) Uvažujme $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$