2. cvičení – Taylorův polynom 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Odhady

1. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$
   Řešení:
   $$\approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$
   kalkulačka
   $$1,39561$$

   (b) $\arcsin 0,2$ **Řešení:**
   $$\approx 0,2$$
   kalkulačka
   $$0,201$$

   (c) $(1,04)^4$ **Řešení:**
   $$\approx 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$$
   kalkulačka
   $$1,1699$$

   (d) $\ln(1,02)$ **Řešení:**
   $$\approx 0,02$$
   kalkulačka
   $$0,01980$$

   (e) $\arctan 1,1$ **Řešení:**
   $$\approx 1,1$$
   kalkulačka
   $$0,83298$$

   (f) $\sin(-0,22)$ **Řešení:**
   $$\approx -0,22$$
   kalkulačka
   $$-0,2182$$

2. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
   Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
   Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = e^x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ a budeme dosazovat za $x = 1$. Pracujeme tedy s intervalem $[0,1]$. Uvažujme nějaké $n \in \mathbb{N}$. Protože $e^x \in \mathcal{C}^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0,1]$ takové, že
   $$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně
$$e^1 - T_n^{e^x,0}(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^c (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$
Nejhorší situace (největší možná chyba) nastává pro $c = 1$, tedy budeme odhadovat výraz
$$\frac{e}{(n+1)!}$$
Aplikujeme odhad $e < 3$ a dostáváme nerovnici
$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$
Tedy
$$3000 < (n+1)!$$
Ta je splněna pro $n \geq 6$.
Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

3. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \cos x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ do stupně $n = 3$ (rozvoj pro $n = 2$ a $n = 3$ je stejný). Uvažujme $x > 0$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, x]$. Protože $\cos x \in \mathcal{C}^4$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, x]$ takové, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$
Konkrétně
$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{(4)!} \cos(c)(x-0)^4 \leq \frac{x^4}{24}.$$
Řešíme tedy nerovnici
$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001.$$
Tedy
$$x^4 \leq 0,0024.$$
To platí cca pro $x < 0,222$. Protože funkce $\cos x$ je sudá, lze pro $x < 0$ aplikovat stejný postup.
Dohromady
$$x \in (-0,222, 0,222).$$

4. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \arctan x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 1$ do stupně $n = 2$. Uvažujme $1 < x < 1.1$. Pracujeme tedy s intervalem $[1, x]$. Protože $\arctan x \in \mathcal{C}^3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [1, x]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Navíc platí

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{1+x^2} \\ f'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f''' &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\pi}{4} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2^{\arctan x, 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Pro odhad chyby pro $x \in [1, 1.1]$ tedy máme

$$\begin{aligned} \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 &= \frac{1}{3!}\frac{6c^2-2}{(1+c^2)^3}(x-1)^3 \le \frac{1}{3!}\frac{6c^2+2}{(1+1^2)^3}(1.1-1)^3 \\ &\le \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1.1^2 + 2}{8} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.19292 \cdot 0.001 \end{aligned}$$

Analogicky pro $x \in [0.9, 1]$ je

$$\begin{aligned} \left| \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \right| &= \left| \frac{1}{3!}\frac{6c^2-2}{(1+c^2)^3}(x-1)^3 \right| \le \frac{1}{3!}\frac{6c^2+2}{(1+0.9^2)^3}|0.9-1|^3 \\ &\le \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1^2 + 2}{1.81^3} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.22486 \cdot 0.001 \end{aligned}$$