2. cvičení – Taylorův polynom 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Věta 2 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Poznámka 3.

1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*

Příklady

1. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$
   (b) $\arcsin 0,2$
   (c) $(1,04)^4$
   (d) $\ln(1,02)$
   (e) $\arctan 1,1$
   (f) $\sin(-0,22)$

   Následující příklady máme odsud: Sbírka z mat. analýzy Zemánek Hasil:
   https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

2. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
3. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
4. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.