1. cvičení – Taylorův polynom

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Z definice

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.
   Jak vypadá Taylorův polynom polynomu?
   Řešení: Začneme derivovat:
   $$f'(x) = -4x - 6$$
   $$f'(4) = -22$$
   $$f''(x) = -4$$
   $$f''(4) = -4$$
   Všechny další derivace už jsou rovny 0, čímž jsme získali odpověd na otázku, jak bude dlouhý rozvoj. Dosadíme:
   $$T_2^{f,4} = -54 - 22(x-4) - \frac{4}{2!}(x-4)^2 = -2x^2 - 6x + 2$$
   Vyšel nám původní polynom.
   Z věty o jednoznačnosti pak plyne, že Taylorův polynom každého polynomu je původní polynom.

2. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v 0 (není-li řečeno jinak)
   (a) e^{-x}
   Řešení:
   $$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -e^{-x}, & f'(0) &= -1 \\ f''(x) &= e^{-x}, & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= -e^{-x}, & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$
   Tedy
   $$T_3^{f,0} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}.$$
   (b) $\sqrt{1+x}$
   Řešení:
   $$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}, & f'(0) &= 1/2 \\ f''(x) &= \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}, & f''(0) &= -1/4 \\ f'''(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}, & f'''(0) &= 3/8 \end{aligned}$$
   Tedy
   $$T_3^{f,0} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

(c) $\ln x$, $a = 1$
Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2}, & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & f'''(1) &= 2 \end{aligned}$$

Tedy

$$T_3^{f,1} = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3.$$

(d) $\arctan x$
Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x, & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, & f'''(0) &= -2 \end{aligned}$$

Tedy

$$T_3^{f,0} = x - \frac{2}{3!}x^3.$$

(e) $\frac{1}{1+x}$
Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x}, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f'(0) &= -1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4}, & f'''(0) &= -6 \end{aligned}$$

Tedy

$$T_3^{f,0} = 1 - x + x^2 - x^3.$$

3. Odvoďte rozvoje pro následující funkce do n-tého řádu v $a = 0$.

(a) e^x
Řešení: Máme $e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots$. Pak $e^0 = 1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots$. Po dosazení do vzorce dostaneme

$$T_n^{e^x,0} = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

(b) $\sin x$

Řešení: Platí, že

$$(\sin x)^{(4n+1)} = \cos x, \quad (\sin x)^{(4n+2)} = \sin x,$$
$$(\sin x)^{(4n+3)} = -\cos x, \quad (\sin x)^{(4n)} = -\sin x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\sin x)^{(4n+1)}(0) = 1, \quad (\sin x)^{(4n+2)} = 0, \quad (\sin x)^{(4n+3)}(0) = -1,$$
$$(\sin x)^{(4n)} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny sudé derivace jsou tedy nulové a liché lze vyjádřit vztahem

$$(\sin x)^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dohromady

$$T_{2n+1}^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(c) $\cos x$
Řešení: Platí, že

$$(\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x,$$
$$(\cos x)^{(4n+3)} = \sin x, \quad (\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\cos x)^{(4n+1)}(0) = 0, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -1, \quad (\cos x)^{(4n+3)}(0) = 0,$$
$$(\cos x)^{(4n)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny liché derivace jsou tedy nulové a sudé lze vyjádřit jedním vztahem

$$(\cos x)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dohromady

$$T_{2n+1}^{\cos x,0} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(d) $\ln(1+x)$ **Řešení:** Platí, že

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \qquad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\ln(1+x)]''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad [\ln(1+x)]^{(iv)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

odkud lze odvodit, že

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Po dosazení dostaneme

$$[\ln(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Dohromady

$$T_{2n+1}^{\ln(1+x)x,0} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

4. Najděte Taylorovy polynomy:

(a) $\sqrt{x}$, v 1 do 5. stupně

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}, \qquad & f(1) &= 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, \qquad & f'(1) &= 1/2\\
f''(x) &= \frac{-1}{4}x^{-3/2}, \qquad & f''(1) &= -1/4\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2}, \qquad & f'''(1) &= 3/8\\
f^{(iv)}(x) &= \frac{-3\cdot 5}{16}x^{-7/2}, \qquad & f^{(iv)}(1) &= -15/16\\
f^{(v)}(x) &= \frac{3\cdot 5\cdot 7}{32}x^{-9/2}, \qquad & f^{(v)}(1) &= 3\cdot 5\cdot 7/32
\end{aligned}
$$

Tedy

$$T_5^{f,1} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4\cdot 2}(x-1)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{105}{32\cdot 5!}(x-1)^5$$

(b) $\cos\frac{x\pi}{2}$, v 1, do 9. stupně

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos\frac{x\pi}{2}, \qquad & f(1) &= 0\\
f'(x) &= -\frac{\pi}{2}\sin\frac{x\pi}{2}, \qquad & f'(1) &= -\frac{\pi}{2}\\
f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{x\pi}{2}, \qquad & f''(1) &= 0\\
f'''(x) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\sin\frac{x\pi}{2}, \qquad & f'''(1) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\\
f^{(iv)}(x) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cos\frac{x\pi}{2}, \qquad & f^{(iv)}(1) &= 0\\
f^{(v)}(x) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\sin\frac{x\pi}{2}, \qquad & f^{(v)}(1) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tedy

$$T_9^{f,1} = -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(\pi/2)^3}{3!}(x-1)^3 - \frac{(\pi/2)^5}{5!}(x-1)^5 + \frac{(\pi/2)^7}{7!}(x-1)^7 - \frac{(\pi/2)^9}{9!}(x-1)^9$$

(c) $\frac{1-x}{1+x}$, v 0, do 7. stupně

Řešení:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-x}{1+x}, & f(0) &= 1\\
f'(x) &= \frac{-2}{(1+x)^2}, & f'(0) &= -2\\
f''(x) &= \frac{-2(-2)}{(1+x)^3}, & f''(0) &= 4\\
f'''(x) &= \frac{-2(-2)(-3)}{(1+x)^4}, & f'''(0) &= -2\cdot 3!\\
f^{(iv)}(x) &= \frac{-2(-2)(-3)(-4))}{(1+x)^5}, & f^{(iv)}(0) &= 2\cdot 4!\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tedy

$$T_7^{f,0} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + 2x^6 - 2x^7$$

(d) $x \ln x$, v 1, do 4. stupně

Řešení:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ln x, & f(1) &= 0\\
f'(x) &= \ln x + 1, & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= \frac{1}{x}, & f''(1) &= 1\\
f'''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f'''(1) &= -1\\
f^{(iv)}(x) &= \frac{2}{x^3}, & f^{(iv)}(1) &= 2
\end{aligned}$$

Tedy

$$T_4^{f,1} = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4$$

(e) $\frac{1}{x}$, v 3, do 5. stupně

Řešení:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x}, & f(3) &= \frac{1}{3}\\
f'(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f'(3) &= -\frac{1}{3^2}\\
f''(x) &= \frac{2}{x^3}, & f''(3) &= \frac{2}{3^3}\\
f'''(x) &= -\frac{6}{x^4}, & f''(3) &= -\frac{6}{3^4}\\
f^{(iv)}(x) &= \frac{24}{x^5}, & f^{(iv)}(3) &= \frac{24}{3^5}\\
f^{(v)}(x) &= -\frac{120}{x^6}, & f^{(v)}(3) &= -\frac{120}{3^6}
\end{aligned}$$

Tedy

$$T_5^{f,3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{1}{3^3}(x-3)^2 - \frac{1}{3^4}(x-3)^3 + \frac{1}{3^5}(x-3)^4 - \frac{1}{3^6}(x-3)^5$$

5. Vyjádřete funkci $\sin\frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.
Řešení: Budeme hledat $T_n^{f,2}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin\frac{x\pi}{4}, & f(2) &= 1\\
f'(x) &= \frac{\pi}{4}\cos\frac{x\pi}{4}, & f'(2) &= 0\\
f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\frac{x\pi}{4}, & f''(2) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\\
f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cos\frac{x\pi}{4}, & f'''(2) &= 0\\
f^{(iv)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\frac{x\pi}{4}, & f^{(iv)}(2) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\\
f^{(v)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^5\cos\frac{x\pi}{4}, & f^{(v)}(2) &= 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tedy

$$T_n^{f,2} = 1-\frac{(\pi/4)^2}{2!}(x-2)^2+\frac{(\pi/4)^4}{4!}(x-2)^4-\frac{(\pi/4)^6}{6!}(x-2)^6+\frac{(\pi/4)^8}{8!}(x-2)^8+\cdots$$

Použitím vět

6. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v $x_0=0$ do m-tého řádu
   (a) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $m=5$.
   Řešení: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}=$$

$$=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))$$

$$+\frac{1}{120}(32x^5+o(x^5))=$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$$

   (b) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$, $m=3$.
   Podle vztahu pro rozvoj mocniny je

$$(1+(-2x+x^3))^{1/2} = 1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2x+x^3)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-2x+x^3)^3+o(x^3)=$$

$$=1+\frac{-2x+x^3}{2}+\left(-\frac{4x^2}{8}+o(x^3)\right)+\left(\frac{3}{8}\frac{1}{6}(-8x^3)+o(x^3)\right)+o(x^3)=$$

$$=1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

Pro další mocninu dostaneme

$$(1+(-3x+x^2))^{1/3} = 1+\frac{1}{3}(-3x+x^2)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(-3x+x^2)^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(-3x+x^2)^3 =$$

$$= 1 + \frac{-3x+x^2}{3} + \left(\frac{-1}{9}\cdot(9x^2-6x^3)+o(x^3)\right) + \left(\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{6}\cdot(-27x^3)+o(x^3)\right) =$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) = 1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Dohromady dostáváme

$$\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} =$$

$$= \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$$

(c) $\dfrac{1}{3-2x}$, $m=\infty$

Řešení:

Nejprve upravíme

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{3}}$$

Pak použijeme rozvoj

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$$

pro $y \in (-1,1)$.

Tedy pro $-1 < \frac{2x}{3} < 1$, tedy pro $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ je

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.$$

(d) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $m=4$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x-x^2|<1$, platí rovnost

$$\begin{aligned}
\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)} &= (1+x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x-x^2)^k \\
&= (1+x+x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2)^2 \\
&\quad + (1+x+x^2)(x-x^2)^3 + (1+x+x^2)(x-x^2)^4 + o(x^4) \\
&= (1+x+x^2) + (x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4) \\
&\quad + (x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4)) \\
&\quad + (x^3+x^4-3x^4+o(x^4)) + (x^4+o(x^4)) + o(x^4) \\
&= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

(e) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $m = 2$.

Na nějakém okolí nuly, kde $|2x| < 1$, platí rovnost

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = (1+x)^{100} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k\right]^{40} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k\right]^{60}$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)\right]^{40} \cdot \left[1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)\right]^{60}$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 + 40 \cdot (2x + 4x^2) + \frac{40 \cdot 39}{2!}(2x + 4x^2)^2 + o(x^2)\right]$$

$$\cdot \left[1 - 60 \cdot (2x - 4x^2) + \frac{60 \cdot 59}{2!}(2x - 4x^2)^2 + o(x^2)\right]$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 + 80x + 160x^2 + \frac{40 \cdot 39}{2!}4x^2 + o(x^2)\right]$$

$$\cdot \left[1 - 120x + 240x^2 + \frac{60 \cdot 59}{2!}4x^2 + o(x^2)\right]$$

$$= 1 + 60x + (50 \cdot 99 + 4 \cdot 20 \cdot 39 + 4 \cdot 30 \cdot 59 + 100 \cdot 80 - 100 \cdot 120 - 80 \cdot 120 + 160 + 240)x^2$$

$$+ o(x^2) = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$$

(f) $f(x) = \ln(\cos x)$, $m = 6$.

Řešení:

Máme

$$(\cos x) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6))$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$

Navíc platí

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Pak

$$\log(\cos x) = \log(1 + V(x)) = V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6)$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

(g) $f(x) = \sin(\sin x)$, $m = 3$.

Řešení: Je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Navíc platí

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

Pak

$$\sin(V(x)) = V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $m = 13$.
Je

$$f(x) = (x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{17}))^{1/3} =$$

$$= x(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{14}))^{1/3}$$

Dále budeme aproximovat pouze závorku, stačí do dvanáctého řádu.

$$(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{14}))^{1/3} =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{14})$, pak dostaneme

$$1 + \frac{1}{3}V(x) - \frac{2}{9}\frac{1}{2!}V(x)^2 + o(x^{14}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{3}\frac{1}{5!}x^{12} - \frac{1}{9}\frac{1}{(3!)^2}x^{12} + o(x^{14}) = 1 - \frac{1}{18}x^6 - \frac{1}{3240}x^{12} + o(x^{14})$$

Dohromady

$$f(x) = x - \frac{1}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{14})$$

(i) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $m = 4$.
Řešení:
Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^5)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^4)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^4).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$$

(j) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $m = 6$.
Sledujte výpočet.

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\frac{x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/7! + o(x^8)}{x}\right) = \ln\left(1 - x^2/6 + x^4/120 - x^6/7! + o(x^7)\right) =$$

označme $V(x) = -x^2/6 + x^4/120 - x^6/7! + o(x^7)$ a rozvinutím logaritmu máme

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^3$$
$$+ o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - 2\frac{x^2}{6}\frac{x^4}{120} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^3 + o(x^6) + o(x^6) =$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6)$$

(Dokonce $o(x^7)$.)

(k) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $m = 5$.
Řešení: Je

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) +$$

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

(l) $f(x) = e^{-x^2} \arcsin x$, $m = 5$
Řešení: Pro e^y máme

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5).$$

Pak

$$e^{-x^2} = 1 + -x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{-x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{-x^{10}}{5!} + o(x^{10}).$$

Dále

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Dohromady

$$\begin{aligned} e^{-x^2} \arcsin x &= \left(1 + -x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + o(x^6)\right) \\ &= x + x^3\left(-1 + \frac{1}{6}\right) + x^5\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + o(x^5) \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{49}{120}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Bonus

7. Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

   (a) $f(0) = 2$ (b) $f'(0) = -1$ (c) $f''(0) = -2/3$ (d) $f'''(0) = 12$

8. Víte-li, že Taylorova řada $\cos x$ v 0 je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, jak je na tom $\frac{1}{2}\cos(2x)$?
   Řešení: D) $\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$

9. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
   Řešení: Ne. Např. $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

10. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?
    Řešení: Za předpokladu, že f'' je spojitá na jistém okolí bodu 0, tak ano, protože $f''(0) = -2$.

11. Který Taylorův polynom bude vhodný k aproximaci hodnoty $\sin 3$, nemáte-li kalkulačku?
    Řešení: C) $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3$, lepší aproximace dosáhneme u bodu $a = \pi$.