1. cvičení – Taylorův polynom

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Věta 2 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 3. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě a malé o od g* (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis

$$f(x) = o(x^n)$$

značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Věta 4 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$, pak
$$(f_1 \pm f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$
2. Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$, pak
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$
3. Jestliže $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak
$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$
4. Jestliže $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ a h je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, pak
$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)h(x)), x \to a.$$
5. Jestliže $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, pak
$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)), x \to a.$$
6. Je-li $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, potom
$$f(x) = o((x-a)^m),\ x \to a.$$

Věta 5. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Nechť $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$ a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Pak

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))),\ x \to a.$$

Věta 6 (Jednoznačnost Taylorova polynomu)**.** Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující st $P \leq n$ a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak $P = T_n^{f,a}$.

Poznámka 7.
1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n*.
2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Hinty

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b \binom{n}{2} a^{m-2} b^2 + \cdots + b^n \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\
(a+b+c)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3
\end{aligned}$$

Algoritmus - Rozvoj z definice

1. Zderivujeme funkci až do n-tého stupně.
2. Dosadíme bod a - získáme koeficienty.
3. Sestavíme Taylorův polynom.

Příklady

Z definice

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.
   Jak vypadá Taylorův polynom polynomu?
2. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v 0 (není-li řečeno jinak)

   (a) e^{-x} (b) $\sqrt{1+x}$ (c) $\ln x$, $a = 1$ (d) $\arctan x$ (e) $\frac{1}{1+x}$

3. Odvoďte rozvoje pro následující funkce do n-tého řádu v $a = 0$.

   (a) e^x (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $\ln(1+x)$

4. Najděte Taylorovy polynomy:

   (a) $\sqrt{x}$ v 1 do 5. stupně
   (b) $\cos \frac{x\pi}{2}$ v 1 do 9. stupně
   (c) $\frac{1-x}{1+x}$ v 0 do 7. stupně
   (d) $x \ln x$ v 1 do 4. stupně
   (e) $\frac{1}{x}$ v 3 do 5. stupně

5. Vyjádřete funkci $\sin \frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x - 2$.

Použitím vět

6. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v $a = 0$ do m-tého řádu
   (a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $m = 5$.
   (b) $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$, $m = 3$.
   (c) ✽ $\dfrac{1}{3-2x}$, $m = \infty$
   (d) ♡ $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $m = 4$.
   (e) ❆ $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $m = 2$.
   (f) ✿ $f(x) = \ln(\cos x)$, $m = 6$.
   (g) $f(x) = \sin(\sin x)$, $m = 3$.
   (h) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $m = 13$.
   (i) ✧ $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $m = 4$.
   (j) $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), & x \neq 0, |x| < \pi \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, $m = 6$. Existenci $f^{(6)}(0)$ berte jako fakt.
   (k) ❀ $f(x) = \operatorname{tg} x$, $m = 5$.
   (l) $f(x) = e^{-x^2} \arcsin x$, $m = 5$

Bonus

7. Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

   (a) $f(0)$ (b) $f'(0)$ (c) $f''(0)$ (d) $f'''(0)$

8. Víte-li, že Taylorova řada $\cos x$ v 0 je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, jak je na tom $\frac{1}{2}\cos(2x)$?

   A $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ B $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$ C $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ D $\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$

9. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
10. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?
11. Který Taylorův polynom bude vhodný k aproximaci hodnoty $\sin 3$, nemáte-li kalkulačku?

    A $x - \frac{1}{3}x^3$ C $-(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3$
    B $1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2$ D $\sin(3) - \frac{1}{3!}\sin(3)(x-3)^3$

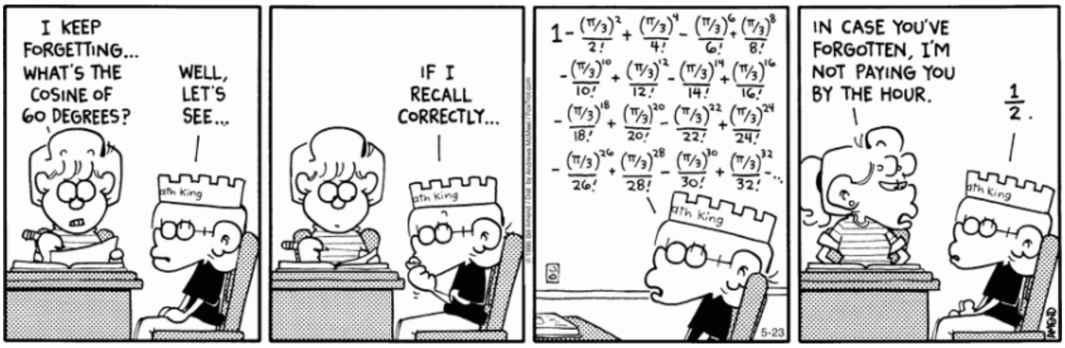

Figure 1: https://www.gocomics.com/foxtrotclassics/2018/05/23

(6c) Užijte geometrickou řadu $\frac{1}{3(1-\frac{2x}{3})}$.
(6d) Užijte geometrickou řadu $\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-(x-x^2)}$ a násobení.
(6e) Užijte geometrickou řadu na výrazy $\frac{1}{1-2x}$ a $\frac{1}{1+2x}$, umocněte, vynásobte.
(6f) Rozvíjejte zevnitř.
(6i) Užijte geometrickou řadu.
(6k) Rozviňte a použijte geometrickou řadu.