14. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Souvislé prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže **není** sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 2 (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \to (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$.

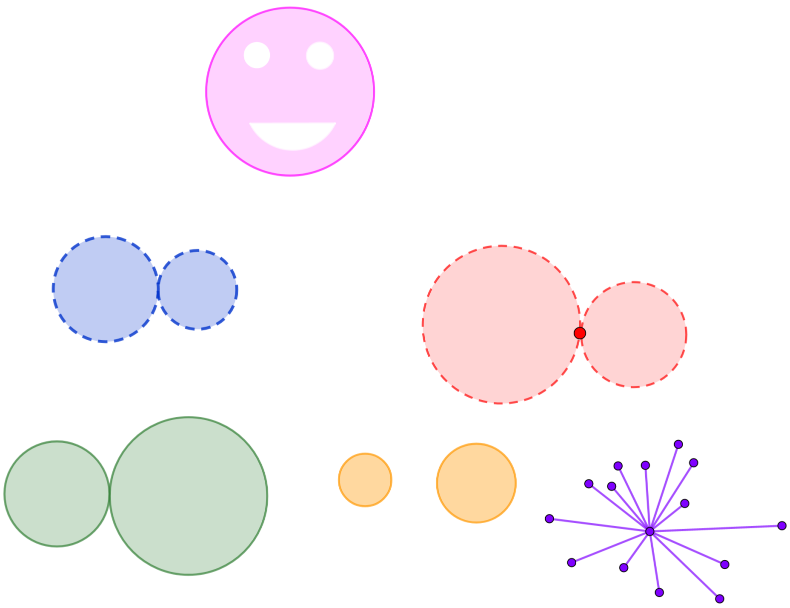
Poznámka 3 (Jiná definice)**.** Prostor (X, ρ) je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ), jestliže existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ), jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 5 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 6. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 7 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**
ANO–NE Nechť A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý.
ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.
ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak $\operatorname{int} A$ je souvislý.
ANO–NE Nechť $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 8 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**
ANO–NE Nechť A není souvislý. Pak A^c není souvislý.
ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak A^c není souvislý.
ANO–NE Nechť A je souvislý. Pak A^c je souvislý.
ANO–NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá.
ANO–NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá.

Úloha 9. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?

Úloha 10 (♡)**.** Ukažte, že prostor $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.

2 Vzorová písemka

1. Uvažujte posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem
$$f_n(x) = \sqrt{n+1}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{nx}}} - 1\right), \qquad \text{pro } x \in (0,\infty), n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Nalezněte funkci $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ splňující $f_n \to f(x) =$ na $(0,\infty)$.
   (b) Rozdhoněte, zda $f_n \rightrightarrows f(x) =$ na $(0,1]$.
   (c) Rozdhoněte, zda $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x) =$ na $(0,1]$.
   (d) Rozdhoněte, zda $f_n \rightrightarrows f(x) =$ na $[1,\infty)$.
   (e) Rozdhoněte, zda $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x) =$ na $[1,\infty)$.
2. Nechť je f definována předpisem
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n)$$
   Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru.
3. Nalezněte střed a poloměr konvergence mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$$
   Určete, pro která x řada konverguje a pro která x řada konverguje absolutně.

4. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(0,\pi]$ dána předpisem

$$f(t) = e^{-2t}, \qquad t \in (0,\pi],$$

a má *sinovou* Fourierovu řadu. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.
Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4+(2k+1)^2}.$$

Figure 1: https://www.meme-arsenal.com/en/create/template/805594

(10) Hledejte spojnice bodů x a y, které jdou přes osu úsečky xy.