13. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = X$.

Metrický prostor (X,ρ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 2. (Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf. Tamtéž opsána některá řešení.)

1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ jsou separabilní.
   Řešení:
   Hledáme spočetnou a hustou podmnožinu A. Pro $\mathbb{R}$ je $A = \mathbb{Q}$, pro $\mathbb{C}$ je to množina bodů s racionálními souřadnicemi - $a = bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$.
   Pro $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uvažujme A^n - body s racionálními souřadnicemi.
   Prostor $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je separabilní. Uvažujme množinu $M := \{q+\pi, q \in \mathbb{Q}\}$. Pak $M \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je spočetná.
   Hustota: Zvolme $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a uvažujme číslo $x-\pi$. Protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tak existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x-\pi-p| < \varepsilon$. Pak ale $|x-(p+\pi)| < \varepsilon$. Tedy k x jsme našli blízké číslo $p+\pi \in M$, což bylo dokázati.

2. Ukažte, že $(C([0,1]), \rho_{\sup})$ je separabilní.
   Řešení: A je množina všech polynomů s racionálními koeficienty.
   Zvolme $f \in C[0,1]$. Pak z Weierstrassovy věty existuje takový polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, že
   $$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$
   Ke koeficientům a_n najděme racionální koeficienty b_n tak, že
   $$\sum_{i=0}^{n} |a_i - b_i| < \varepsilon.$$
   (Lze z předchozího příkladu.)
   Uvažujme polynom $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$. Pak
   $$\sup_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)x^i\right| \le \sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i|x^i \le \sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i| < \varepsilon.$$
   Dohromady
   $$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - Q(x)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)| < \varepsilon + \varepsilon.$$

3. Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?
   Řešení: Konvergentní posloupnost v diskrétním prostoru musí být od jistého bodu konstantní. Z toho plyne, že jediná hustá množina v diskrétním prostoru je celé X. A aby X byl separabilní, musí být X spočetná.

4. Ukažte, že $L^1([0,1])$ je separabilní.
   Řešení: Nechť M je množina takových jednoduchých funkcí, které mají hodnoty v $\mathbb{Q}$ a zároveň jsou definované pomocí intervalů s racionálními koncovými body. Pak M je hustá a spočetná.

Věta 3. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x,y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 4. Nechť $p \in [1,\infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x-y|^p\right)^{1/p}.$$

Poznámka 5. Označme l_∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 6. (Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf. Tamtéž opsána řešení.) Ukažte, že

1. l^∞ není separabilní.
   Řešení: Uvažujme $P = 2^{\mathbb{N}}$, množinu všech podmnožin přirozených čísel. Taková množina je nespočetná. Pro $A, B \in P$, $A \neq B$ sestrojme χ_A a χ_B - posloupnosti 0 a 1.
   Pak platí
   $$\rho_\infty(\chi_A, \chi_B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\chi_A - \chi_B| = 1.$$
   Pak dle Věty 3 prostor l_∞ nemůže být separabilní.

2. c_0 je separabilní.
   Řešení: Uvažujme množinu
   $$A_n = \{x = \{x_i\} \in c_0; x_i \in \mathbb{Q}, x_i = 0 \text{ pro } i > n\}$$
   - posloupnosti s racionálními členy, které jsou navíc od daného n nulové.
   Dále položme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pak A je spočetná (sjednocení spočetných) a hustá v c_0.
   Zvolme $y = \{y_i\} \in c_0$. Protože $\lim_{i\to\infty} y_i = 0$, lze ke každému ε najít n_0 takové, že pro $i > n_0$ je $|y_i| < \varepsilon$.
   Pro každé $i \leq n_0$ najdeme $r_i \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - y_i| < \varepsilon$. Sestrojme posloupnost
   $$x_i = \begin{cases} r_i, & i \leq n_0, \\ 0, & i > n_0. \end{cases}$$
   Pak $x \in A_{n_0}$ a platí
   $$\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = \max\{\sup_{i\leq n_0} |x_i - y_i|, \sup_{i>n_0} |x_i - y_i|\} < \varepsilon.$$

Úloha 7. Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. $X = \mathbb{R}^2$, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ máme

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Uvažujme spočetnou hustou množinu M.

Pro každý bod x (krom počátku) musí blízký bod m z M ležet na polopřímce spojující x s počátkem (jinak bychom šli přes střed, což by dalo obrovskou vzdálenost). Tedy se ptáme, jestli každá polopřímka obsahuje dostatek bodů z M.

Předpokládejme, že na každé polopřímce leží alespoň jeden bod z M (zároveň nemůže ležet na více přímkách najednou). Polopřímek je ale nespočetně - každá odpovídá jednomu úhlu z intervalu $[0, 2\pi)$, což je nespočetná množina.

Tedy jsme ve sporu a pampeliškový prostor není separabilní.

Úloha 8. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f, g) = \sup\left\{\frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{|x - y|}; x \neq y\right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor L_0 není separabilní.

(Zdroj: `http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/29-mtr/lekce29-mtr-pmax.pdf`)

Řešení: Uvažujme M - množinu funkcí které se rovnají 0 na $[0, r]$ a pak se rovnají $x - r$ pro různá $r \in [0, 1]$. Tato množina je nespočetná.

Zvolme $f, g \in M$ s příslušnými $r_f < r_g$.

Obrázek: `https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk`

Lipschitzovská konstanta $f - g$ je 1. Tedy jsme našli nespočetnou množinu z Věty 3 a množina není separabilní.

2

Definice 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je *ε-síť v X*, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 10. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

Poznámka 11.
- Někdy se říká i *prekompaktní.*
- Definici lze potkat i takto: Z každého ε-pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 12. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Řešení: Jelikož koule v diskrétním metrickém prostoru jsou buď jeden bod nebo celý prostor, je diskrétní metrický prostor vždy omezený.

Z téhož důvodu je totálně omezený právě tehdy, když má konečný počet prvků.

Úloha 13. Uvažujte prostor l^2. Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Řešení: Uvažujme M množinu posloupností a_n, které mají na n-tém místě 1, jinde 0.

Pak $\rho(a_n, b_n) = \sqrt{2}$.

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/8$ a ε-síť S. Pak ale S nemůže být konečná, protože potřebuje nekonečně mnoho bodů (a ε-koulí) aby pokryla M.

Úloha 14 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO Totálně omezená množina je omezená.

NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 15. Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Řešení: Nechť A je totálně omezený. Pak lze najít konečnou $\varepsilon/2$-síť

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$A \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Pak $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon)$.

Zvolme $x \in \bar{A}$. Pak každá koule se středem v x protíná A. Speciálně tedy existuje $y \in B(x, \varepsilon/2) \cap A$.

Zároveň toto $y \in B(x_i, \varepsilon/2)$ pro nějaké i. Ale pak

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_i) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Hotovo.

Úloha 16. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

Řešení: Např. interval $(2, 4)$ - není uzavřený.

3

Definice 17. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K-lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K-lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 18. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval otevřený i neomezený.

Úloha 19. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. $|x|$ na $[-1, 1]$
   Řešení: Zvolme $x, y \in [-1, 1]$. Pak
   $$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$
   (Lipschitzovská konstanta je 1.)
2. x^2 na $[1, 2]$
   Řešení:
   Zvolme $x, y \in [1, 2]$. Pak
   $$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq (2 + 2)|x - y|.$$
   (Lipschitzovská konstanta je 4.)
3. x na $\mathbb{R}$
   Řešení: Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že
   $$|x - y| \leq 1 \cdot |x - y|.$$
   (Lipschitzovská konstanta je 1.)

Úloha 20. Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$
   Řešení:
   Zvolme $N > 0$ a $x = N$ a $y = 2N$. Pak
   $$|x^2 - y^2| = 3N^2 = 3N|x - y| > N|x - y|.$$
2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$
   Problém je poblíž 0. Zvolme tedy $1 > n > 0$ (malé n) a $x = 0$ a $y = 1/n$. Pak
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}|x - y|.$$
   Ale protože pro každé $N > 0$ najdeme n tak, že $N < \sqrt{n}$, dostaneme
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| > N|x - y|.$$

Úloha 21. Nechť X je množina slov skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\begin{aligned} \rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) &= 8, \\ \rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) &= 7, \\ \rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) &= 2. \end{aligned}$$

Pro slovo z 10 písmen $\alpha = x_1, x_2, \dots x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(\alpha) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Řešení:
Uvažujme slova α a β, která už mají první písmeno shodné. Pak

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta).$$

Pokud slova α a β naopak mají první písmeno rozdílné, tak se jejich vzdálenost o 1 zmenší, tedy

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta) - 1 < \rho(\alpha, \beta).$$

Lipschitzovská konstanta je tedy rovna 1.

Úloha 22. Nechť f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$
   Řešení:
   Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

   $$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq K|x-y|+L|x-y| = (K+L)|x-y|.$$

2. $f(g)$
   Řešení: Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

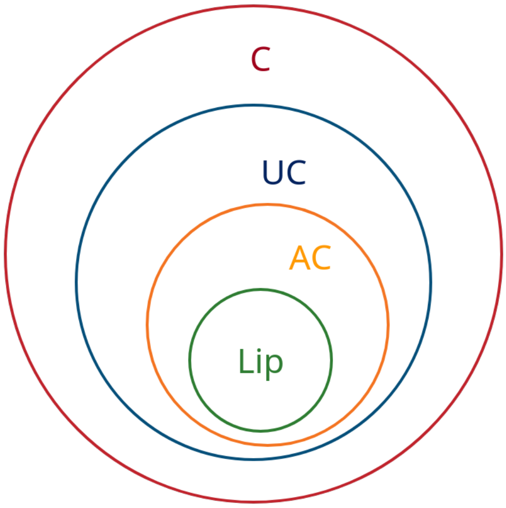
   $$|f(g(x)) - f(g(y))| \leq K|(g(x)) - (g(y))| \leq KL|x - y|.$$

Úloha 23. Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).
Řešení:
Zvolme dělení $\{x_i\}$ intervalu$[a, b]$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} K|x_i - x_{i-1}| \leq K|b - a|.$$

Úloha 24. Najděte funkci, která je AC, ale není Lip.
Řešení:
Např. $\sqrt{x}$.

Úloha 25. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité (C), lipschitzovské (Lip), stejnoměrně spojité (UC) a absolutně spojité (AC) na $[a, b]$.



Úloha 26. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Řešení:

Lipschitzovská funkce nemusí být omezená, např. x na $\mathbb{R}$.

Omezená funkce nemusí být lipschitzovská, např. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$.

Ale pokud jsme na omezeném intervalu $[a, b]$, pak lipschitzovská funkce musí být omezená. Např. proto, že je spojitá na kompaktu, tedy omezená.

Opačně to stále neplatí ani pro kompaktní interval.

Úloha 27. Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

Řešení:

Na přednášce byla věta: Lipschitzovská funkce na $[a, b]$ má konečnou derivaci skoro všude na $[a, b]$.

Obecně lipschitzovská funkce nemusí mít derivaci, např. $|x|$.

Pokud ale je f diferencovatelná na $[a, b]$ a navíc $|f'| < M$, tak už je lipschitzovská.

Zvolme $a \leq x \leq y \leq b$. Pak z Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje ξ tak, že $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Pak

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq M|y - x|.$$