13. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Definice (Po částech monotónní funkce - dle J. Tišera)**.** Funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá *po částech monotónní*, pokud existuje konečně mnoho dělících bodů $a < t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, že f je spojitá a monotónní na každém intervalu (t_i, t_{i+1}) a ve všech dělících bodech existují vlastní jednostranné limity funkce f.

Poznámka. Pro ukázání, že je funkce BV, je tedy potřeba napsat, že je na daných intervalech **monotónní a omezená**.

1 Separabilní prostory

Definice 1. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = X$.

Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 2.
1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou separabilní.
2. ♡ Ukažte, že $(C([0, 1]), \rho_{\sup})$ je separabilní.
3. ✿ Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?
4. ❄ Ukažte, že Lebesgueův prostor $L^1([0, 1])$ je separabilní.

Věta 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 4. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p\right)^{1/p}.$$

Poznámka 5. Označme l_∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

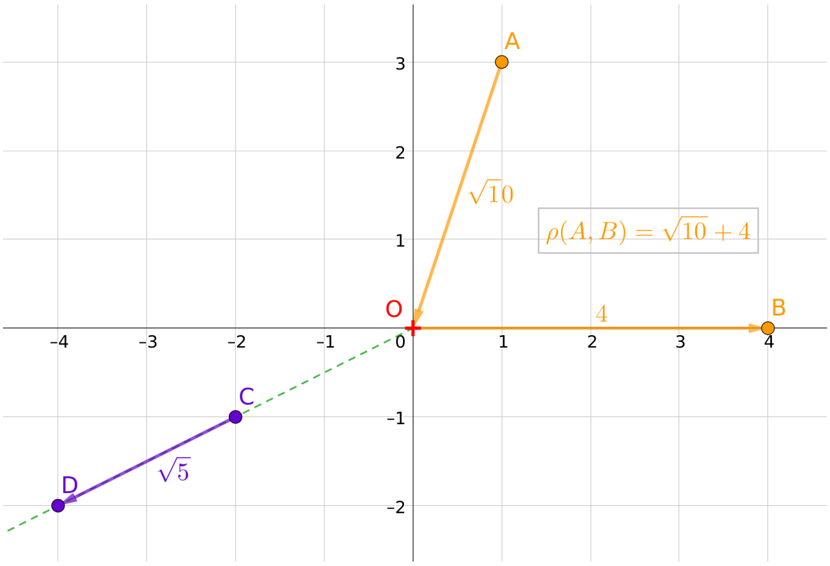
$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 6 (♡)**.** Ukažte, že

1. l^∞ není separabilní.
2. c_0 je separabilní.

Úloha 7 (❀)**.** Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. Položme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Úloha 8. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0,1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f,g) = \sup\left\{\frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{|x-y|}; x \neq y\right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor L_0 není separabilní.

Návod: Uvažujte funkce, které se rovnají 0 na $[0,r]$ *a pak se rovnají* $x - r$ *pro různá* $r \in [0,1]$. *Obrázek k návodu:* https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk

---

2 Totálně omezené prostory

Definice 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je *ε-síť v X*, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 10. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

Poznámka 11.
- Někdy se říká i *prekompaktní.*
- Definici lze potkat i takto: Z každého ε-pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 12. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Úloha 13 (☆)**.** Uvažujte prostor l^2. Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Úloha 14 (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**
ANO–NE Totálně omezená množina je omezená.
ANO–NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 15 (❀)**.** Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Úloha 16. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

---

3 Lip

Definice 17. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K-lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K-lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 18. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval **otevřený i neomezený**.

Úloha 19. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. ✽ $|x|$ na $[-1, 1]$
2. ✱ x^2 na $[1, 2]$
3. x na $\mathbb{R}$

Úloha 20 (✤). Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$
2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$

Úloha 21. Nechť X je množina slov (ne nutně smysluplných) skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\begin{aligned} \rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) &= 8, \\ \rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) &= 7, \\ \rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) &= 2. \end{aligned}$$

Pro slovo z 10 písmen $x = x_1, x_2, \ldots x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(x) = a, x_2, \ldots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Úloha 22. Nechť f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$
2. $f(g)$

Úloha 23 (✿). Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Úloha 24. Najděte funkci, která je AC, ale není Lip.

Úloha 25. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité, lipschitzovské, stejnoměrně spojité a absolutně spojité na $[a, b]$.

Úloha 26. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Úloha 27 (♡). Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

(2.2) polynomy s $\mathbb{Q}$ koeficienty
(2.3) jak vypadá konvergence v diskr. prostoru?
(2.4) co některé jednoduché funkce?
(6.1) posloupnosti typu χ_A, $A \subset \mathbb{N}$
(6.2) posloupnosti s $\mathbb{Q}$ členy
(7) Zvolte bod x. Kde musí ležet jeho hustý kamarád? A kolik je polopřímek, které procházejí počátkem?
(13) posloupnosti, které mají na n-tém místě 1, jinde 0.
(15) Začněte s $\varepsilon/2$ sítí. Když ji nafouknete na ε-síť, co se stane?
(19.1) $||a| - |b|| \le |a - b|$
(19.2) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
(20) Problém vzniká s neomezenou derivací.
(23) Z definice.
(27) Lagrangeova věta o střední hodnotě.