(1) (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$S_0 = 1$

$S_1 = 0$

$S_2 = 1$

$S_3 = 0$

$c_0 = \frac{S_0}{1+0} = 1$

$c_1 = \frac{S_0 + S_1}{1+1} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$c_2 = \frac{S_0 + S_1 + S_2}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$

$c_3 = \frac{S_0 + \cdots + S_3}{4} = \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{2}{4}$

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4

lze zapsat jako n sudé $\left(\frac{n}{2}+1\right) / n+1$

n liché $\left(\frac{n+1}{2}\right) / n+1$

$\rightarrow$ 2 podposloupnosti tvoří naši posl.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}}$$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$

$= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$

$S_0 = 1$

$S_1 = -1$

$S_2 = 2$

$S_3 = -2$

$k = 2n \qquad n+1 = \frac{k}{2}+1$

$a_{2n} = n+1$

Cesàr:

$S_0 = 1$

$S_0 + S_1 = 0$

$S_0 + S_1 + S_2 = 2$

$S_0 + \quad + S_3 = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \dots \end{array}$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{2}+1 & n \text{ sudé} \\ 0 & n \text{ liché} \end{cases}$$

2 podposl.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} \frac{0}{n+1} = 0 \\ \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = 1/2 \end{array}\right\} \lim \nexists$$

(1e) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

$1+2+3+4$

$S_0 = 1$

$S_1 = 3$

$S_2 = 6$

$S_3 = 10$

$S_n = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+6+10+\cdots+\frac{n+1}{2}(n+2)}{n+1} \geq \lim \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)} = \boxed{\infty}$$

2

**Příklad A3.** Nalezněte $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na $(-\pi,\pi]$ definovaná předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t, & t\in[0,\pi] \\ 2t, & t\in(-\pi,0). \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu $f$. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje tato řada a určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž tato řada konverguje lokálně stejnoměrně. S pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}$.

**Řešení:** předpis $f$ na $\mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} t-2k\pi, & t\in[2k\pi,(2k+1)\pi] \\ 2(t-2k\pi), & t\in((2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$$

výpočet Fourierových koeficientů

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}(0-\pi^2) + \frac{1}{2\pi}(\pi^2-0) = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2t\cos(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\,\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right) + \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(1-\cos(-k\pi)\right) + \frac{1}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi)-1\right) = \frac{1}{\pi k^2}\left(2-2(-1)^k + (-1)^k - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi(2j+1)^2}, & k=2j+1,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0, & k=2j,\ j\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2t\sin(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(kt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{k}(-\pi) + \frac{2}{\pi k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k}{k} = \frac{3(-1)^{k+1}}{k}.$$

Fourierova řada

$$s^f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt), \quad t\in\mathbb{R}$$

Konvergence Fourierovy řady

- $f$ je rostoucí na $(-\pi,\pi)$, takže $f\in BV([-\pi,\pi])$, tedy podle Jordanova-Dirichletova kritéria $s^f$ konverguje na $\mathbb{R}$ a platí

$$s^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

- $f$ je navíc spojitá na každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, a tedy $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na těchto intervalech. Tyto intervaly jsou maximální, protože $f((2k-1)\pi-) = \pi$, $f((2k-1)\pi+) = -2\pi$, takže $f$ není spojitá v $(2k-1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Maximalita intervalů tedy plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty.

číselná řada

Položme $t=0$. Potom $f$ je spojitá v $t$ a $\sin(kt)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Tedy

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}, \quad \text{takže} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3

Příklad C3. Nalezněte $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right| .$$

Spočtěte Fourierovu řadu $s^f$ funkce $f$. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje $s^f$ bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda $s^f$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení: Položme

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t - 2l\pi| - \frac{\pi}{2} \right| , \quad t \in (-\pi + 2l\pi, \pi + 2l\pi],\ l \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in \mathcal{P}^{2\pi}$ a $f$ je sudá. Pro její Fourierovy koeficienty tedy platí $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt , \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(kt)\,dt$$

$$= \quad \underline{I} \quad + \quad \underline{II} \; ,$$

Substituce v $\underline{II}$: $\quad s = \pi - t \qquad \begin{array}{c|c|c} t & \pi/2 & \pi \\ \hline s & \pi/2 & 0 \end{array} \;, \quad t = \pi - s$

$\qquad\qquad ds = -dt$

$$\cos(kt) = \cos(k(\pi - s)) = \cos(k\pi - ks) =$$

$$= \cos(k\pi)\cos(ks) + \sin(k\pi)\sin(ks)$$

$$= (-1)^k \cos(ks) \,,$$

takže

$$\underline{II} = \frac{2}{\pi}(-1)^k \int_0^{\pi/2} s\cos(ks)\,ds \,,$$

a tedy

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(1 + (-1)^k\right)\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt \,.$$

Odtud dostáváme

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ liché} \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\cos(kt) & \text{pro } k \text{ sudé,} \end{cases}$$

to jest

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2j+1, \; j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt, & k = 2j, \; j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt = \left[t\,\frac{\sin(2jt)}{2j}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2jt)}{2j}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi j)}{2j} - \left[-\frac{\cos(2jt)}{4j^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{\cos(\pi j)-1}{4j^2}$$

$$= \frac{(-1)^j-1}{4j^2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j=2m,\ m\in\mathbb{N}, \\ -\dfrac{1}{2j^2} & \text{pro } j=2m+1,\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

Tedy $a_{4m+2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{2(2m+1)^2} = -\frac{2}{\pi(2m+1)^2}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$a_k = 0$ pro $k = 4m,\ 4m+1,\ 4m+3$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Odtud dostáváme

$$S^f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((4m+2)t)}{(2m+1)^2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Protože $f$ je po částech monotónní na $[-\pi,\pi]$, platí $f\in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je $f$ spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy platí $S_n^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy díky periodicitě $f$ platí $S_n^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Platí tedy

$$\frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((4m+2)t)}{(2m+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Položme $t=0$. Dostaneme

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

a tedy $$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4

**Příklad B3.** Nalezněte $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na intervalu $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = |\sin t + t|.$$

Spočtěte Fourierovu řadu $s^f$ funkce $f$. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje $s^f$ bodově a v těchto bodech určete její součet.

Rozhodněte, zda $s^f$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1} \right).$$

**Řešení.** Rozšíříme $f$ na $\mathbb{R}$ tak, aby byla $2\pi$-periodická. Položme

$$f(t) = |\sin(t-2k\pi)| + |t-2k\pi| \quad \text{pro} \quad t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi], \; k \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Protože $f$ je sudá, platí

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \text{ pro } k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad \text{a} \quad b_k = 0 \text{ pro } k \in \mathbb{N}.$$

Fourierovy koeficienty: Pro každé $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(t)+t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cdot\cos(kt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt$$
$$= a_k^1 + a_k^2.$$

Jest pro $k \in \mathbb{N}$

$$a_k^1 = \frac{2}{\pi}\left( \underbrace{\left[\sin(t)\cdot\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}\cos(t)\,\frac{\sin(kt)}{k}\,dt \right) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)\,\frac{\sin(kt)}{k}\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left( \left[\cos(t)\cdot\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\sin(t))\cdot\frac{-\cos(kt)}{k^2}\,dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left( \frac{(-1)\cdot(-1)^{k+1}+1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(kt)\,dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^k}{k^2} + \frac{a_k^1}{k^2}.$$

Odtud plyne pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$a_k^1 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{k^2}, \quad \text{tedy}$$

$$a_k^1 = -\frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{k^2-1} = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ liché}, \\ -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2-1}, & \text{je-li } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Dále

$$a_0^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(1-(-1)) = \frac{4}{\pi},$$

a

$$a_1^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2t)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

Podobně vypočteme

$$a_k^2 = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[t\, \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k}\, dt\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2},$$

a $a_0^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$. Tudíž

$$a_k^2 = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \\ 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Celkem $\frac{a_0}{2} = \frac{a_0^1 + a_0^2}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

a pro každé $k \in \mathbb{N}$ jest

$$a_k = a_k^1 + a_k^2 = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(k^2-1)}, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{je-li } k \text{ liché}. \end{cases}$$

Fourierova řada

Platí $s^f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kt)$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\cos((2j-1)t)}{(2j-1)^2} + \frac{\cos(2jt)}{4j^2-1}\right).$$

## Konvergence Fourierovy řady

Funkce $f$ je na $[0,\pi]$ součtem rostoucí funkce $t$ a po částech monotónní funkce $\sin(t)$. Tedy $f \in BV([0,\pi])$. Dále je $f$ sudá, a tedy $f \in BV([-\pi,\pi])$. Protože $\lim\limits_{t\to\pi-} f(t) = \lim\limits_{t\to\pi+} f(t) = \pi$ a $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, je $f$ spojitá na $\mathbb{R}$. Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy $S^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$. Podle charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence odtud plyne, že $S^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy $S^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$, neboť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.

## Součet číselné řady

Položme $t=0$. Z předchozího vyplývá, že $f(0) = S^f(0)$, tedy

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1}\right).$$

Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}}.$$

5

Příklad D3. Naleznete $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t)=e^{-\frac{t}{2}}.$$

Spočtěte Fourierovu řadu $s^f$ funkce $f$. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje $s^f$ bodově a v těchto bodech určete její součet. Naleznete maximální intervaly, na nichž $s^f$ konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1}.$$

Řešení: Položme

$$f(t)=e^{-\frac{t-2k\pi}{2}} \quad \text{pro } t\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi],\ k\in\mathbb{Z}.$$

Potom $f\in P^{2\pi}$. Dále je $f$ klesající na $(-\pi,\pi]$, a tedy $f\in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je $f$ spojitá na $(-\pi,\pi]$.

Spočítáme Fourierovy koeficienty $f$. Jest

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}.$$

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\cos(kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\sin(kt)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\left(\left[e^{-\frac{t}{2}}\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\frac{-\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\cos(-k\pi) - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(k\pi)\right) - \frac{1}{4k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_k}{4k^2},$$

takže

$$a_k\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

a tedy

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\cdot\frac{4k^2}{4k^2+1}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{4}{4k^2+1}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Dále jest pro $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sin(kt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left( \left[ e^{-\frac{t}{2}} \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\right) \frac{-\cos(kt)}{k}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left( e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(k\pi)}{k} - e^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(k\pi)}{k} \right) - \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_k}{2k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{(-1)^k}{2k\pi} \frac{4}{4k^2+1} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4k^2+1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{4k^2}{4k^2+1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{8k}{4k^2+1}.$$

Tedy

$$S^f(t) = \frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+1}\left(\cos(kt) + 2k\sin(kt)\right).$$

Protože $f \in BV([-\pi,\pi])$, podle Jordanova-Dirichletova kritéria platí

$$s^f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t-2k\pi}{2}}, & t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right), & t = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Protože $f$ je spojitá na $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, platí $s^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na těchto intervalech. Maximalita těchto intervalů plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty, protože $f$ není spojitá v $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Speciálně pro $t=0$ platí

$$1 = \frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1},$$

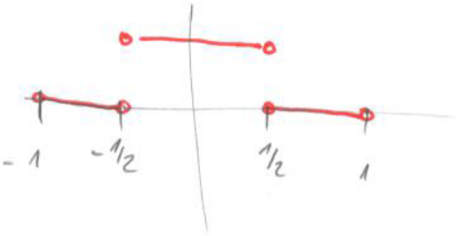
takže

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1} = \left(1-\frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

6

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-1,-1/2)\\ 1 & (-1/2,\ 1/2)\\ 0 & (1/2,\ 1)\end{cases}$$




sudá $\rightarrow$ $b_n=0$ $\qquad$ $2L=2 \rightarrow L=1$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{\pi n x}{1}\,dx=\int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi n x)\,dx=\left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}-\frac{\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

n sudé: $0$ $\qquad$ n liché: $+1$ $\quad -1$

$$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)=\int_{-1/2}^{1/2}1\,dx=1$$

$$F_1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{\pi(2n-1)}\cos((2n-1)x\pi)$$

$$c_0=\frac{\frac{1}{2}}{0+1}=\frac{1}{2}$$

$$c_1=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)}{1+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\right)$$

$$c_2=\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\pi x+\frac{-1\cdot 2}{\pi\cdot 3}\cos(3\pi x)}{1+2}$$