12. cvičení - Fourierovy řady 3

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *sčítatelná Cesàrovou metodou* k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} e^{inx} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \cos(nx) = \operatorname{Re} e^{inx} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Goniometrické vzorce:
https://www.eeweb.com/tools/trigonometry-laws-and-identities-sheet/

Algoritmus pro Cesàrovu sumaci

1. Rozepíšeme členy posloupnosti.
2. Rozepíšeme částečné součty.
3. Zkusíme odhadnout součty částečných součtů.
4. Spočteme limitu.

Příklady

1. Sečtěte metodou aritmetických průměrů (pokud to lze):

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

Zkouškové příklady

2. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

   Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem
$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left||t| - \frac{\pi}{2}\right|$$
Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

4. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem
$$f(t) = |\sin(t) + t|$$
Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1}.$$

5. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem
$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}.$$
Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+1}.$$

Bonus

Definice 2. Nechť f má periodu $2L$. Pak *Fourierovy koeficienty funkce f* jsou definovány jako
$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}.$$
Fourierova řada pak je definována jako
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{kx\pi}{L}\right) + b_k\sin\left(\frac{kx\pi}{L}\right).$$

6. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Vytvořte první 3 Cesàrovské součty a porovnejte, jak rychle konverguje obyčejná Fourierova řada vůči Cesàrovským součtům na obrázku tady: https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch5/cesaro.html
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, -\frac{1}{2}), \\ 1, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$