Lepení ODR se separovanými proměnnými

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/,

Příklad

$y' = \sqrt[3]{y^2}$

1. Pracujeme s funkcemi $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$, $h(x) = 1$.
   Řešení hledáme na intervalech $x \in I = (-\infty, \infty)$.
   Stacionární řešení je $y \equiv 0$.
   Intervaly, kde je g nenulové (ale definované), jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.
2. Po zintegrování obou stran rovnice, dostáváme
$$3\sqrt[3]{y} = x + C.$$
   Označme $G(y) = 3\sqrt[3]{y}$, $H(x) = x$.
3. (a) Zafixujeme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$, $I = \mathbb{R}$ a konstantu $C \in \mathbb{R}$.
   Hledáme takové $x \in I$, aby
$$H(x) + C \in G(J_1).$$
   V tomto případě je
$$G(J_1) = (-\infty, 0).$$
   Potřebujeme tedy, aby
$$x + C < 0,$$
   tedy
$$x < -C.$$
   Pro taková x vyjádříme y:
$$y = \left(\frac{x + C}{3}\right)^3.$$
   (b) Opět zafixujeme intervaly, tentokrát $J_2 = (0, \infty)$, $I = \mathbb{R}$ a konstantu $C \in \mathbb{R}$ (může to být jiná konstanta než v předešlém případě).
   Opět hledáme takové $x \in I$, aby
$$H(x) + C \in G(J_2).$$
   V tomto případě je
$$G(J_1) = (0, \infty).$$
   Potřebujeme tedy, aby
$$x + C > 0,$$

tedy

$$x > -C.$$

Pro taková x vyjádříme y:

$$y = \left(\frac{x + C}{3}\right)^3.$$

4. Máme tedy různá řešení:

   (a) $y = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ (stacionární řešení);

   (b) $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (-C, \infty)$, kde $C \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (\infty, -D)$, kde $D \in \mathbb{R}$.

5. Přichází čas **lepení**. Když se podíváme na původní diferenciální rovnici, tak je vidět, že bychom rádi našli řešení (pokud možno) na celém $\mathbb{R}$. Stacionární řešení toto splňuje, další řešení ovšem nikoli.

   (a) Mějme tedy $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ pro $x \in (-C, \infty)$, kde $C \in \mathbb{R}$.
   Potřebujeme najít řešení, které bude definované na $(-\infty, -C)$, v bodě $x = -C$ bude mít stejnou hodnotu, a navíc se tato dvě řešení napojí hladce (bude tam existovat derivace - nebude tam zub).
   Limita funkce
   $$\lim_{x \to -C+} \left(\frac{x + C}{3}\right)^3 = 0.$$
   Zkusme to nalepit se stacionárním řešením, tedy s funkcí $y = 0$ pro $x \in (-\infty, -C)$.
   Máme
   $$\lim_{x \to -C-} 0 = 0,$$
   hodnoty se tedy shodují.
   Lemma (na začátku textu) pak zajistí, že toto napojení je hladké.
   Můžeme tedy definovat nové řešení
   $$y_1(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -C), \\ 0 & x = -C, \\ \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

   (b) Stejným způsobem se dá nakombinovat funkce
   $$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -C), \\ 0 & x = -C, \\ 0 & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

(c) Tím jsme pořád nepostihli všechny kombinace, ještě je tu funkce

$$y_3(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+D}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -D), \\ 0 & x = -D, \\ 0 & x \in (-D, -C). \\ 0 & x = -C, \\ \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, & x \in (-C, \infty), \end{cases}$$

kde $D \geq C$.

6. Řešením jsou pak funkce y_1, y_2, y_3 a stacionární řešení $y = 0$, všechny definované na $\mathbb{R}$.