28. cvičení – ODR vyššího řádu – variace konstant

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici a sestavíme řešení (kde se bude vyskytovat několik konstant).
2. **Zkontrolujeme**, jestli příklad přeci jen není na **speciální pravou stranu**.
3. Přepíšeme **konstanty** na **„funkce“** a jdeme derivovat. Po každém **zderivování** se položí část rovnice s derivacemi c' **rovna 0**. Konkrétně: začínáme s funkcí

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots c_n(x)y_n(x).$$

Po 1. zderivování dostaneme

$$y_p' = (c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots c_ny_n') + (c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n)$$

a položíme

$$(c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n) = 0.$$

Po 2. zderivování dostaneme

$$y_p'' = (c_1y_1'' + c_2y_2'' + \cdots c_ny_n'') + (c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n')$$

a položíme

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n') = 0.$$

Po n-tém zderivování dostaneme

$$y_p^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \cdots c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)})$$

a dosadíme do původní nehomogenní rovnice. Dostaneme

$$(c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)}) = f.$$

4. Z modrých řádků získáme soustavu pro c', spočteme.
5. Zintegrujeme konstanty c'.
6. Řešením je **homogenní** + **dopočtené** řešení.
7. Případně dořešíme **podmínky**.

Hinty

$$\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int -\sin x\,\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int 1 + \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int -3x\sqrt{x+1} \text{ subst. } t = \sqrt{x+1} \to \int -3x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{(x+1)^3} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}$$

$$\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1. Zdroj:
   Obyčejné diferenciální rovnice - studijní text pro cvičení v předmětu Matematika - 2. E. Nováková, M. Hyánková a L. Průcha
   https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf

   (a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
   (b) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
   (c) $y'' + y = \operatorname{tg} x$
   (d) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$
   (e) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
   (f) $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Zkouškové příklady

2. (a) $y'' + y = \sin^2 x$
   (b) $y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$
   (c) $y''' + y' = \tan x$

Bonus

3. Najděte homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém řešení tvoří funkce:

   (a) e^x, e^{-2x}
   (b) $\cos 3x$, $\sin 3x$
   (c) $e^{2x}\sin(-x)$, $e^{2x}\cos(-x)$
   (d) e^{-5x}, xe^{-5x}
   (e) $\sin x$, $\cos 2x$

4. Je funkce h lineární kombinací funkcí f a g?

(ANO – NE) $h(x) = 4 + 3x$, $f(x) = (1+x)^2$, $g(x) = 2 - x - 2x^2$
(ANO – NE) $h(x) = \sin(x+2)$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$
(ANO – NE) $h(x) = x^2$, $f(x) = (1-x)^2$, $g(x) = (1+x)^2$