26. cvičení – lineární ODR

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y' + y = e^x$

   Řešení:

   - Máme funkce $p(x) = 1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
   - Vyřešíme homogenní rovnici
   $$y' + y = 0$$
   Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
   Dále na intervalech $(a,b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme
   $$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -1\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= -x + c \\ |y| &= e^{-x+c} \\ |y| &= e^c e^{-x} \\ y &= \pm e^c e^{-x} \end{aligned}$$
   Spolu se stacionárním řešením lze psát
   $$y = ce^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$
   - Variace konstant. Máme
   $$y' = c'e^{-x} - ce^{-x}$$
   Dosadíme do původní rovnice
   $$\begin{aligned} c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} &= e^x \\ c'e^{-x} &= e^x \\ c' &= e^{2x} \\ c &= \frac{1}{2}e^{2x} + K \end{aligned}$$
   - Závěr:
   $$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K\right)e^{-x}, x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

   (b) ❄ $xy' - y = x^2$

   Řešení:

   - Pro původní rovnici je $x \in \mathbb{R}$. Převedeme na lineární rovnici:
   $$y' - \frac{y}{x} = x.$$
   Dále řešíme pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici
$$y' - \frac{y}{x} = 0$$
Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
Dále na intervalech $(a, b) = (-\infty, 0)$ (resp. $(a, b) = (0, \infty)$), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= \log|x| + c \\ |y| &= e^{\log|x|+c} \\ |y| &= e^{c}|x| \\ y &= \pm e^{c}|x| \end{aligned}$$
Spolu se stacionárním řešením lze psát
$$\begin{aligned} y = cx, &\qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, 0), \\ y = dx, &\qquad d \in \mathbb{R},\ x \in (0, \infty) \end{aligned}$$
- Variace konstant. Máme
$$y' = c'x + c$$
Dosadíme do původní rovnice
$$\begin{aligned} c'x + c - \frac{cx}{x} &= x \\ c' &= 1 \\ c &= x + K \end{aligned}$$
- Řešení:
$$\begin{aligned} y = (x + K_1)x, &\qquad K_1 \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), \\ y = (x + K_2)x, &\qquad K_2 \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty) \end{aligned}$$
- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě 0. Uvažujme funkci
$$y = \begin{cases} x(x + K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0 \\ x(x + K_2), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$
Aby funkce byla spojitá v 0, musí platit
$$\lim_{x\to 0-} y(x) = \lim_{x\to 0-} x(x + K_1) = 0 = \lim_{x\to 0+} y(x) = \lim_{x\to 0+} x(x + K_2),$$
což je splněno pro všechna K_1, K_2.
Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\mathbb{R}$, máme
$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} y'(x) = \lim_{x\to 0-} 2x + K_1 = K_1 \\ y'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lim_{x\to 0+} 2x + K_2 = K_2 \end{aligned}$$
Tedy $K_1 = K_2$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} x(x+K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \qquad K_1 \in \mathbb{R}, \\ x(x+K_1), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(c) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -x$, $q(x) = e^{\frac{x(x+2)}{x}}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - xy = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
Dále na intervalech $(a,b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' - xy &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ |y| &= e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \\ y &= \pm e^c e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2} - xe^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{x(x+2)}{2}} \\ c'e^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{x(x+2)}{2}} \\ c' &= e^x \\ c &= e^x + K \end{aligned}$$

- Závěr:

$$y = (e^x + K)\, e^{\frac{1}{2}x^2} x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

(d) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$

Řešení:

- Pro původní rovnici je $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Převedeme na lineární rovnici:

$$y' - y \cot x = \cot x.$$

Dále řešíme pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ a $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - y\cot x = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)$ a $x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$. Dále na intervalech $(a,b) = (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)$ (resp. $(a,b) = (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$) a $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' - y\cot x &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \cot x\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= \log|\sin x| + c \\ |y| &= e^{\log|\sin x| + c} \\ |y| &= e^{c}|\sin x| \\ y &= \pm e^{c}|\sin x| \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$\begin{aligned} y = c\sin x, &\qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi) \\ y = d\sin x, &\qquad d \in \mathbb{R},\ x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \end{aligned}$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'\sin x + c\cos x$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} c'\sin x + c\cos x - c\sin x \cdot \cot x &= \cot x \\ c' &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ c &= -\frac{1}{\sin x} + K \end{aligned}$$

- Řešení:

$$\begin{aligned} y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_1^k\right)\sin x = -1 + K_1^k \sin x, &\qquad K_1^k \in \mathbb{R},\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi) \\ y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_2^k\right)\sin x = -1 + K_2^k \sin x, &\qquad K_2^k \in \mathbb{R},\ x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \end{aligned}$$

- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě $0 + k\pi$. Uvažujme funkci

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k \sin x, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi) \\ -1, & x = 0 \\ -1 + K_2^k \sin x, & x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \end{cases}$$

Funkce je spojitá v $0 + k\pi$ pro všechna $K_1^k, K_2^k \in \mathbb{R}$.

Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi$, máme

$$y'_-(0+k\pi) = \lim_{x\to 0+k\pi-} y'(x) = \lim_{x\to 0+k\pi-} K_1^k \cos x = K_1^k$$
$$y'_+(0+k\pi) = \lim_{x\to 0+k\pi+} y'(x) = \lim_{x\to 0+k\pi+} K_2^k \cos x = K_2^k$$

Tedy $K_1^k = K_2^k$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k \sin x, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi) \\ -1, & x = 0, \qquad K_1^k \in \mathbb{R} \\ -1 + K_1^k \sin x, & x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \end{cases}$$

(e) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 3$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^3}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, 0)$ a $(0,\infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
Dále na intervalech $(a,b) = (-\infty,0)$ (resp. $(0,\infty)$), $J_1 = (-\infty,0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' + \frac{3}{x}y &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= -3\log|x| + c \\ |y| &= e^c \frac{1}{|x|^3} \\ y &= \pm e^c \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = c\frac{1}{x^3}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty,0) \text{ nebo } x \in (0,\infty).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = \frac{c'}{x^3} - 3\frac{c}{x^4}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} \frac{c'}{x^3} - 3\frac{c}{x^4} + \frac{3}{x}\cdot\frac{c}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{c'}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ c' &= 2 \\ c &= 2x + K \end{aligned}$$

- Závěr:
$$y = \frac{2x+K}{x^3}, x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty).$$
- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = 3$. Tedy
$$\begin{aligned} \frac{2+K}{1^3} &= 3, \\ K &= 1. \end{aligned}$$

  Tedy řešením je
$$y = \frac{2x+1}{x^3}, x \in (0, \infty).$$

(f) $y' = y + e^x$, $y(2) = -3$
Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici
$$y' - y = 0$$
  Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.
  Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y &= \int 1 \,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= x + c \\ |y| &= e^{x+c} \\ |y| &= e^c e^x \\ y &= \pm e^c e^x \end{aligned}$$
  Spolu se stacionárním řešením lze psát
$$y = ce^x, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a, b).$$
- Variace konstant. Máme
$$y' = c'e^x + ce^x$$
  Dosadíme do původní rovnice
$$\begin{aligned} c'e^x + ce^x - ce^x &= e^x \\ c'e^x &= e^x \\ c' &= 1 \\ c &= x + K \end{aligned}$$
- Závěr:
$$y = (x+K)e^x, x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(2) = -3$, tedy

$$\begin{aligned}(2+K)e^2 &= -3\\ K &= \frac{-3-2e^2}{e^2}\\ K &= \frac{-3}{e^2} - 2\end{aligned}$$

  Řešením je tedy

$$y = (x - 3e^{-2} - 2)e^x, x \in \mathbb{R}.$$

(g) $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3$, $y(1) = -1$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -\frac{3x^2}{1+x^3}$, $q(x) = 1 + x^3$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0.$$

  Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
  Dále na intervalech (a,b), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned}y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} &= 0\\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\\ \log|y| &= \log|1+x^3| + c\\ |y| &= e^{\log|1+x^3|+c}\\ |y| &= e^c|1+x^3|\\ y &= \pm e^c(1+x^3)\end{aligned}$$

  Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = c(1+x^3), \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'(1+x^3) + 3cx^2$$

  Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned}c'(1+x^3) + 3cx^2 - \frac{3x^2}{1+x^3}c(1+x^3) &= 1 + x^3\\ c' &= 1\\ c &= x + K\end{aligned}$$

- Závěr:

$$y = (x+K)(1+x^3),\ x \in (-1,\infty),\ \text{nebo } x \in (-\infty,-1)$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = -1$. Tedy

$$\begin{aligned} (1+K)(1+1^3) &= -1 \\ K &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

  Tedy řešením je

$$y = (x - \frac{3}{2})(1+x^3),\ x \in (-1, \infty)$$

(h) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

Řešení:

- Původní rovnice je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Nejprve ji převedeme na základní tvar

$$y' + \frac{(x+1)}{x}y = 3xe^{-x}$$

- Máme funkce $p(x) = \frac{x+1}{x}$, $q(x) = 2xe^{-x}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + \frac{(x+1)}{x}y = 0$$

  Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
  Dále na intervalech (a,b), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' + \frac{(x+1)}{x}y &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= -x - \log|x| + c \\ |y| &= e^{-x-\log|x|+c} \\ |y| &= e^c e^{-x}\frac{1}{x} \\ y &= \pm e^c e^{-x}\frac{1}{x} \end{aligned}$$

  Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{-x}\frac{1}{x}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{-x}\frac{1}{x} - ce^{-x}\frac{1}{x} - \frac{ce^{-x}}{x^2}$$

  Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} c'e^{-x}\frac{1}{x} - ce^{-x}\frac{1}{x} - \frac{ce^{-x}}{x^2} + \frac{x+1}{x}ce^{-x}\frac{1}{x} &= 3xe^{-x} \\ c'e^{-x}\frac{1}{x} &= 3xe^{-x} \\ c' &= 3x^2 \\ c &= x^3 + K \end{aligned}$$

- Zatím máme:
$$y = (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0), K_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (0, \infty), K_2 \in \mathbb{R}$$
- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě 0. Uvažujme funkci
$$y = \begin{cases} (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0), \\ (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$
  Aby funkce byla spojitá v 0, musí platit
$$\lim_{x\to 0-} y(x) = \lim_{x\to 0-} (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} y(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x}.$$
  Limity existují vlastní a rovnají se pouze pro $K_1 = K_2 = 0$. Limita je pak rovna 0.
  Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\mathbb{R}$, máme
$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} y'(x) = \lim_{x\to 0-} -e^{-x}x(x-2) = 0 \\ = y'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lim_{x\to 0+} -e^{-x}x(x-2) = 0 \end{aligned}$$
- Závěr:
$$y_1 = \begin{cases} (x^2)e^{-x}, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \\ (x^2)e^{-x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$
$$y_2 = (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0), K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$y_3 = (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (0, \infty), K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$
   (b) $y' - y\ln x = x^{x+1}$
   (c) ❀ $xy' - 2y = 2x^4$
   (d) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x}\sin x$
   (e) $y'(1 + x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1 + x^2)$
   (f) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

2

(a) $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$ $\qquad x \neq 0$

- $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

$\ln|y| = -\ln x + k$

$|y| = e^k \cdot e^{\ln\frac{1}{x}}$

$y = k \cdot \frac{1}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$

- $k' \cdot \frac{1}{x} + k \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot k\frac{1}{x} = e^{x^2}$

$k' = x e^{x^2}$ $\qquad$ subst.

$k = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

- $y_1 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right) \qquad x \in (0,\infty)$

$y_2 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + d\right) \qquad x \in (-\infty,0)$

(b)

$y' - y \ln x = x^{x+1}$ $\qquad x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}$ $\qquad \boxed{x>0}$

- $y' = y \ln x$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \ln x \,dx$ $\qquad$ per partes

$\ln|y| = x\ln x - x + k$

$|y| = e^{\ln x^x - x + k}$

$\underline{y = k\, e^{-x} \cdot x^x}$

- $y_p = k(x)\, e^{-x} \cdot x^x = k\, e^{-x} e^{x \ln x}$

$k' e^{-x} x^x + k\left(-e^{-x} x^x + e^{-x} x^x \cdot (\ln x + 1)\right) - k\, e^{-x} x^x \ln x = x^{x+1}$

$\underline{k' e^{-x} x^x = x^{x+1}}$

$k' = e^x \cdot x$ $\qquad$ per partes

$\underline{k = e^x x - e^x + C}$

celkem $\qquad \underline{y = (e^x x - e^x + C)\, e^{-x} \cdot x^x} \qquad x \in (0, \infty)$

(c)

$$xy' - 2y = 2x^4 \qquad x \in \mathbb{R}$$

- $y' - 2y \cdot \frac{1}{x} = 2x^3 \qquad x \neq 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln x + k$$

$$\underline{y = kx^2} \qquad k \in \mathbb{R}$$

- $k'x^2 + k \cdot 2x - 2kx^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x^3 \qquad x > 0$

$$k' = 2x$$

$$k = x^2 + c_1$$

- $y = (x^2 + c_1)x^2 \qquad x > 0$

- pro $x < 0$ dostaneme

$$y = (x^2 + c_2)x^2$$

- v 0 lze slepit,

$$y = \begin{cases} x^2(x^2 + c_2) & x \in (-\infty, 0) \\ x^2(x^2 + c_1) & x \in [0, \infty) \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

máme v 0 derivaci? Lze přímo upočítat, fce je spoj.

$$y'_+ = \lim_{x \to 0+} 4x^3 + 2c_1 x = 0$$

$$y'_- = \lim_{x \to 0-} 4x^3 + 2c_2 x = 0$$

Všechno ok

(d)

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$$

- $$\frac{y'}{y} = -3x^2$$

$$\ln|y| = -x^3 + c$$

$$y = e^{-x^3} \cdot k \qquad k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

- $$e^{-x^3} \cdot k' + k e^{-x^3}(-3x^2) + 3x^2 k e^{-x^3} = e^{-x^3+x} \sin x$$

$$k' = e^x \sin x \qquad \text{2x per partes}$$

$$k = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$$

$$y = e^{-x^3}\left(\frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c\right) \qquad x, c \in \mathbb{R}$$

(e)

$$y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$$

$$y' + \frac{y}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2 \qquad x \in (-\infty, 0) \quad x \in (0, \infty)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{\arctan x\,(1+x^2)}$$

$$\ln|y| = -\ln|\arctan x| + k$$

$$y = k\,\frac{1}{\arctan x} \qquad x \neq 0$$

$$k'\frac{1}{\arctan x} + k\,\frac{-1}{\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{k\,\frac{1}{\arctan x}}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2$$

$$k' = x^2 \arctan x \qquad \text{per partes}$$

$$\int x^2 \arctan x = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{2x^3}{2(1+x^2)}\,dx$$

$u' = x^2 \quad v = \arctan x \qquad u = 1+x^2$

$u = \frac{1}{3}x^3 \quad v' = \frac{1}{1+x^2} \qquad du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}(u - \ln u)$$

celkem

$$k = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c$$

$$y = \frac{1}{\arctan x}\left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c\right]$$

$x \neq 0$

(f) $y' + \frac{x}{1+x^2} y = 1$

$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{1+x^2}$

$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$

$y = k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (= k(1+x^2)^{-1/2})$

$k' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + k \cdot (-\frac{1}{2}) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x + \frac{xk}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$

$k' = \sqrt{1+x^2}$ buď spec. subst. $y = \sinh x$

nebo Euler. subst.

máme

$t = \sqrt{x^2+1} + x$

$\int \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$ pak (z tabulky) $x = \frac{t^2-1}{2t}$

$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t}$

$= \int \frac{2t^2-t^2+1}{2t} \cdot \frac{2t^2-t^2+1}{2t^2}\, dt$ a $dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2}{4t^2}\, dt$

$= \int \frac{(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{4t^3} dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3} dt = \frac{1}{4}\int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\, dt =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln t + \frac{-1}{2t^2}\right) \rightarrow$

$k = \underbrace{\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^2} + c}$

pak $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big[\quad - \shortparallel - \quad \Big]$

$x \in \mathbb{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)
LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \qquad (10\ \text{bodů}).$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \qquad (10\ \text{bodů})$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x\sin x. \qquad (10\ \text{bodů})$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \qquad (10\ \text{bodů})$$

Příklad F5: Najděte všechna $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ taková, že maximální řešení $\boldsymbol{y}$ počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$$

splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}(t)}{t} e^{-t} = \boldsymbol{o}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2$, $x \in \mathbf{R}$, $c > 0$;

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \le 0,\ c_2 \le 0;$$

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2} - x)^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$

jiná substituce dá

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x + c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x-c) - x$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F5: $\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$

Bernoulliho rovnice

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

   Řešení: Jedná se o Bernoulliho rovnici

$$y' = xy - y^3 e^{-x^2},$$

kde $a(x) = x$, $b(x) = -e^{-x^2}$, $\alpha = 3$.

- Uvažujme $y > 0$. Použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Zřejmě $z > 0$. Pak $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

  Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= x\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z^3}} e^{-x^2} \\ -\frac{1}{2} z' &= xz - e^{-x^2} \\ z' &= -2xz + 2e^{-x^2} \end{aligned}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$\begin{aligned} z' &= -2xz \\ \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int -2x\,\mathrm{d}x \\ \log|z| &= -x^2 + c \\ z &= ce^{-x^2}, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  Variace konstant:

$$\begin{aligned} c'e^{-x^2} + ce^{-x^2}(-2x) &= -2xce^{-x^2} + 2e^{-x^2} \\ c' &= 2 \\ c &= 2x + K \end{aligned}$$

  Tedy řešení je ve tvaru

$$z = (2x + K)e^{-x^2}$$

- Protože $z > 0$, tak máme podmínku $x > -\frac{K}{2}$, $K \in \mathbb{R}$.
  Vyjádříme y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}.$$

- Uvažujme $y < 0$. Pak $y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme opět

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}}z' = x\frac{-1}{\sqrt{z}} - \frac{-1}{\sqrt{z^3}}e^{-x^2}$$
$$z' = -2xz + 2e^{-x^2}$$

Řešením je tedy

$$y = -\frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}.$$

- Pro $y = 0$ máme stacionární řešení

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Řešení nejdou nalepit, tedy závěr:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}.$$
$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(b) $xy^2y' = x^2 + y^3$
Řešení:

- Předpokládejme, že $x \neq 0$. Pak ani $y \neq 0$ (platilo by $0 = x^2$, což nelze). Pak lze rovnici upravit na

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

Jedná se o Bernoulliho rovnici kde $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x$, $\alpha = -2$.

- Použijeme substituci $z = y^3$. Pak $y = \sqrt[3]{z}$ a

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}z' = \frac{x}{\sqrt[3]{z^2}} + \frac{\sqrt[3]{z}}{x}$$
$$z' = 3x + \frac{3z}{x}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$z' = \frac{3z}{x}$$
$$\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\log|z| = \log|x^3| + c$$
$$z = cx^3, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Variace konstant:

$$\begin{aligned}c'x^3 + c3x^2 + \frac{3cx^2}{x} &= 3x\\ c' &= \frac{3}{x^2}\\ c &= -\frac{3}{x} + K\end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$z = -3x^2 + Kx^3, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

- Pak pro y máme

$$y = \sqrt[3]{-3x^2 + Kx^3}$$

Aby y bylo řešením, musí mít vlastní derivaci. Problémové body jsou tedy body, kde

$$\sqrt[3]{-3x^2 + Kx^3} = 0,$$

tedy $x = 0$ a $x = K/3$. Máme tedy řešení na intervalech

  - pro $K > 0$ je $x \in (-\infty, 0)$, $(0, 3/K)$, $(3/K, \infty)$,
  - pro $K < 0$ je $x \in (-\infty, 3/K)$, $(3/K, 0)$, $(0, \infty)$,
  - pro $K = 0$ je $x \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

Nalepit nelze.

(c) $y' + 2xy = 2xy^3$

Řešení:

Jedná se o Bernoulliho rovnici kde $a(x) = -2x$, $b(x) = 2x$, $\alpha = 3$.

- Uvažujme $y > 0$. Použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Zřejmě $z > 0$. Pak $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= -\frac{2x}{\sqrt{z}} + \frac{2x}{\sqrt{z^3}}\\ z' &= 4xz - 4x\end{aligned}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$\begin{aligned}z' &= 4xz\\ \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int 4x\,\mathrm{d}x\\ \log|z| &= 2x^2 + c\\ z &= ce^{2x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Variace konstant:

$$\begin{aligned}c'e^{2x^2} + ce^{2x^2}(4x) &= 4xce^{2x^2} - 4x\\ c' &= -4xe^{-2x^2}\\ c &= e^{-2x^2} + K\end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$z = 1 + Ke^{2x^2}$$

- Protože $z > 0$, dostaneme:
  - Pro $K \geq 0$ je $x \in \mathbb{R}$.
  - Pro $K \in (-1, 0)$ je $x \in (-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}})$.
  - Pro $K \leq -1$ nemá řešení.

  Vyjádříme y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

- Uvažujme $y < 0$. Pak $y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

  Po dosazení do původní rovnice máme opět

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= \frac{2x}{\sqrt{z}} - \frac{2x}{\sqrt{z^3}} \\ z' &= 4xz - 4x \end{aligned}$$

  Řešením je tedy

$$y = \frac{-1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

  na stejných intervalech jako výše.
- Pro $y = 0$ máme stacionární řešení

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Řešení nejdou nalepit, tedy závěr:

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

  a

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

  - Pro $K \geq 0$ je $x \in \mathbb{R}$.
  - Pro $K \in (-1, 0)$ je $x \in (-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}})$.
  - Pro $K \leq -1$ nemá řešení.