25. cvičení – ODR se separovanými proměnnými - lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):
   (a) $y' = 2\sqrt{y}$
      i. obecně
      Řešení:
      - Podmínky: $y > 0$
      - Budeme řešit rovnici tvaru
      $$y' = 2\sqrt{y}$$
      tedy $g(y) = 2\sqrt{y}$, $h(x) = 1$.
      - Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
      - Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení
      $$y_0 \equiv 0.$$
      - Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
      - Řešení ODR:
      $$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$$
      $$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{2\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$
      Tedy budeme pracovat s rovnicí
      $$\sqrt{y} = x + C$$
      - Uvažujme intervaly I a J. Pak
      $$\sqrt{y} = x + C$$
      kde C je konstanta.
      Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
      Tedy hledáme taková x, aby
      $$x + C > 0$$
      což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.
      Pro taková x vyjádříme řešení
      $$y_1 = (x + C)^2$$
      - Řešení:
      $$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$
      $$y_1 = (x + C)^2, x \in (-C, \infty)$$

- Lepení: Řešení y_1 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

$$\lim_{x\to -C+} y_1 = \lim_{x\to -C+} (x+C)^2 = 0 = \lim_{x\to -C-} y_0$$

  Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

ii. $y(4) = 1$;
Z počáteční podmínky máme

$$\begin{aligned} 1 &= (4+C)^2 \\ \pm 1 &= 4 + C \\ -3 &= C_1 \end{aligned}$$

Tedy

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3), \\ 0, & x = 3, \\ (x-3)^2, & x \in (3, \infty), \end{cases}$$

Druhá možnost

$$-5 = C_2$$

by dala řešení

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 5), \\ 0, & x = 5, \\ (x-5)^2, & x \in (5, \infty), \end{cases}$$

které ale nesplňuje počáteční podmínku $y(4) = 1$.

iii. $y(0) = -1$;
Řešení: Ze zadání máme podmínku $y > 0$, tedy tato počáteční podmínka nemůže nastat.

iv. $y(1) = 0$;
Počáteční podmínku splňuje stacionární řešení $y \equiv 0$.
Dále je splněna pro všechna řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty), \end{cases}$$

kde $C \leq -1$.

(b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Řešení:

- Podmínky: $y > 0$, $x > 0$.
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
tedy $g(y) = \sqrt{y}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (0, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty).$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 2\sqrt{x}$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} 2\sqrt{y}$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$
- Uvažujme intervaly I a J. Pak
$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$2\sqrt{x} + C > 0.$$
Je-li $C \geq 0$, je rovnice splněna triviálně. Tedy pro $x \in I = (0, \infty)$ vyjádříme řešení
$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > 0, C \geq 0.$$
Je-li $C < 0$, tak
$$2\sqrt{x} + C > 0$$
$$\sqrt{x} > -\frac{C}{2}$$
$$x > \left(-\frac{C}{2}\right)^2$$
Pro taková x vyjádříme řešení
$$y_2 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > \frac{C^2}{4}, C < 0.$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (0,\infty)$$
$$y_1 = \left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2, \qquad x>0, C\geq 0.$$
$$y_2 = \left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2, \qquad x>\frac{C^2}{4}, C<0.$$

- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $\frac{C^2}{4}$ slepit. Máme

$$\lim_{x\to\frac{C^2}{4}+} y_2 = \lim_{x\to\frac{C^2}{4}+}\left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2 = \lim_{x\to\frac{C^2}{4}+}\left(\frac{|C|}{2}+\frac{C}{2}\right)^2 = 0 = \lim_{x\to\frac{C^2}{4}+} y_0 =$$

  Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_3 = \begin{cases} 0, & x\in(0,\frac{C^2}{4}),\\ 0, & x=\frac{C^2}{4},\\ \left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2, & x\in\left(\frac{C^2}{4},\infty\right)\end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (0,\infty).$$
$$y_1 = \left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2, \qquad x>0, C\geq 0.$$
$$y_3 = \begin{cases} 0, & x\in(0,\frac{C^2}{4}),\\ 0, & x=\frac{C^2}{4},\\ \left(\sqrt{x}+\frac{C}{2}\right)^2, & x\in\left(\frac{C^2}{4},\infty\right)\end{cases} \qquad C<0$$

(c) $y' = \sqrt[3]{y}$
Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \sqrt[3]{y}$$
  tedy $g(y)=\sqrt[3]{y}$, $h(x)=1$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I=(-\infty,\infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y=0$ Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1=(-\infty,0)$, $J_2=(0,\infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x)=\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$$
$$G(y)=\int\frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = x + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$x + C > 0$$

což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} &= x + C \\ \sqrt[3]{y^2} &= \frac{2}{3}(x + C) \\ |y| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} \end{aligned}$$

Na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$ je $y < 0$, tedy

$$y_1 = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Analogickým postupem dostaneme řešení

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_1 = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Lepení: Řešení y_1 i y_2 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

$$\lim_{x \to -C+} y_{1,2} = \lim_{x \to -C+} \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} = 0 = \lim_{x \to -C-} y_0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x+C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

(d) $y' = yx$

Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = yx$$
tedy $g(y) = y$, $h(x) = x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \overset{C}{=} \log|y|$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$x + C \in \mathbb{R}$$
což je splněno pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$
Protože jsme na intervalu J_1, dostáváme řešení
$$y_1 = -e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

- Analogicky na intervalech J_2, I dostaneme řešení
$$y_2 = e^{\frac{1}{2}x^2+C}$$
- Řešení:
$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$
$$y_{1,2} = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+C}, x \in (-\infty, \infty)$$
- Lepení: Tento příklad slepit nelze, všechna řešení už jsou maximální.

(e) $y' = \sqrt{1-y^2}$

Řešení:

- Podmínky: $1 - y^2 > 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \sqrt{1-y^2}$$
tedy $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, $h(x) = 1$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = \pm 1$ Rovnice má stacionární řešení
$$y_{0,1} \equiv \pm 1.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (-1, 1)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \overset{C}{=} \arcsin y$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$\arcsin y = x + C$$
- Uvažujme intervaly I a J. Pak
$$\arcsin y = x + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}$$
což je splněno pro $x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$.
Pro taková x vyjádříme řešení
$$y_2 = \sin(x + C)$$
- Řešení:
$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty)$$
$$y_2 = \sin(x + C), x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$$

- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $-\frac{\pi}{2} - C$ a $\frac{\pi}{2} - C$ slepit. Máme

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} y_2 = \lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} \sin(x + C) = \pm 1 = \lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} y_{0,1}$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$

(f) $y'y = x^3$
Řešení:
- Podmínky:
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \frac{x^3}{y}$$

tedy $g(y) = \frac{1}{y}$. $h(x) = x^3$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod původní rovnice (než jsme ji upravili) je

$$y = 0.$$

Řešení $y_0 \equiv 0$ ale nesplňuje diferenciální rovnici. Stacionární řešení tudíž rovnice nemá.
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4}x^4$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int y \overset{C}{=} \frac{1}{2}y^2$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$\frac{1}{4}x^4 + C > 0$$

Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in (-\infty, \infty)$.
Pro $C \leq 0$ vyjdou intervaly $(-\infty, -\sqrt[4]{-4C})$ a $(\sqrt[4]{-4C}, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$|y| = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

Na intervalu J_1 pak dostaneme

$$y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

- Pro intervaly I a J_2 postupujeme analogicky a získáme řešení

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

- Řešení:

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C \leq 0$$

$$y_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C \leq 0.$$

- Lepení: Slepit lze pouze řešení pro $C = 0$ (se sebou navzájem). Máme totiž

$$\lim_{x \to -\sqrt[4]{-4 \cdot 0}-} y_{3,4} = \lim_{x \to -\sqrt[4]{-4 \cdot 0}-} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2 \cdot 0} = 0$$

a

$$\lim_{x \to \sqrt[4]{-4 \cdot 0}+} y_{5,6} = \lim_{x \to \sqrt[4]{-4 \cdot 0}+} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2 \cdot 0} = 0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C < 0$$

$$y_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C < 0.$$

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

(g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$ **Řešení:**

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = x\sqrt[3]{y^2}$$
tedy $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$ $h(x) = x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \stackrel{C}{=} 3\sqrt[3]{y}$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (-\infty, 0)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$\frac{1}{2}x^2 + C < 0.$$
To může nastat jen pro $C < 0$. Pak $x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C})$.
Pro taková x vyjádříme řešení
$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Uvažujme intervaly I a J_2. Pak

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$\frac{1}{2}x^2 + C > 0.$$

Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in \mathbb{R}$.
Pro $C \leq 0$ dostaneme $x \in (-\infty, -\sqrt{-2C})$ a $x \in (\sqrt{-2C}, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0$$

$$y_4 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (\sqrt{-2C}, \infty), C \leq 0$$

- Lepení: Řešení y_1, y_3 a y_4 lze v bodech $\mp\sqrt{-2C}$ slepit. Máme

$$\lim_{x \to -\sqrt{-2C}+} y_1 = \lim_{x \to -\sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x \to \sqrt{-2C}-} y_1 = \lim_{x \to \sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{-2C}-} y_3 = \lim_{x \to -\sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x \to \sqrt{-2C}+} y_4 = \lim_{x \to \sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

Díky lemmatu o lepení půjdou řešení hladce nalepit (ve více kombinacích).

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

a dále slepená řešení

$$y_5 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0 \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_6 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0 \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_7 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0 \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D, E \leq 0$, kde $C \geq D \geq E$, máme

$$y_8 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2E}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2E}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, kde $C \geq D$, máme

$$y_9 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, -\sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, kde $C \geq D$, máme

$$y_{10} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, $C \geq D$ máme

$$y_{11} = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

2. Příklady ze starších písemek.

(a) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$
(b) $y' = x\sqrt{y}$
(c) $y' \sin x = 2y \ln y$
(d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}$

Separované proměnné – homogenní rovnice

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$
   (b) $xy' - y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) = 0$
   (c) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}$

4a $y' = x \sqrt[3]{1-y}$ $\quad g(y)$, $h(x)$

$I = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$

$y_0 \equiv 1$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}}\,dy = \int x\,dx$$

$g(y) \neq 0$ na $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ $= J$

$$-\frac{3}{2}(1-y)^{2/3} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{(1-y)^2} = -\frac{x^2}{3} + c \quad \to \text{ musí být } > 0$$

≥ 0

$$(1-y)^2 = \left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3$$

$$(1-y) = \pm\sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3}$$

$$1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = y \qquad c \in \mathbb{R} \; ; \; c \geq \frac{x^2}{3} \qquad \sqrt{3c} \geq |x|$$

Rozbor:
- $c \leq 0$ nelze (prázdný / 1bodový def. obor)
- $c > 0$ $\to$ $x < \sqrt{3c}$, $x > -\sqrt{3c}$ $\quad x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c})$

- pro $x \to \pm\sqrt{3c}$ dostáváme $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3c}} 1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = 1$

$\to$ budeme lepit

Celkem

$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 + \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 - \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

2b) $y' = x\sqrt{y}$ $\qquad g(y) = \sqrt{y}$

$h(x) = x \qquad D_h = \mathbb{R} = I$

(2) $y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

(3) $g \neq 0$ na $(0,\infty) = J$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int x \, dx$

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \rightarrow$ musí být > 0 $\qquad$ ($G(J) = (0,\infty)$

$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad\qquad 2\sqrt{y} \quad (0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$)

$\frac{x^2}{4} + k > 0 \qquad x^2 > -4k \qquad$ "$|x| > \sqrt{-4k}$"

(5) Rozbor:

$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$ • $k > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

• $k \leq 0 \qquad x > \sqrt{-4k} \qquad x \in (\sqrt{-4k}, \infty)$

$-\sqrt{-4k} \qquad \sqrt{4k} \qquad\qquad x < -\sqrt{-4k} \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$

(6) Závěr:

$y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

$y_1 = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad x \in \mathbb{R}$ pro $k > 0$ $\qquad$ (nelze slepit, nemá je max.)

$$y_2 = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases} \qquad k \leq 0$$

$$y_3 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

$$y_4 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & [-\sqrt{-4k}, \sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & (\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

4c

$$y' \sin x = 2y \ln y$$

"jako" $y' = \underbrace{2y \ln y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{h(x)}$ → $x \in \underbrace{(0+k\pi, \pi+k\pi)}_{I}$ $k \in \mathbb{Z}$

↳ nulové body $y=0$ → nelze změnit logaritmu

$y \equiv 1$

$J = (0,1)$

$= (1,\infty)$

$$\int \frac{1}{2y\ln y}\,dy = \int \frac{1}{\sin x}\,dx$$ → výpočet minule (5d)

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ln|\ln y|}_{G(y)} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

↳ $\cos x \neq 1$ $x \neq 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x \neq -1$ $x \neq \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$G((0,1)) = \mathbb{R}$

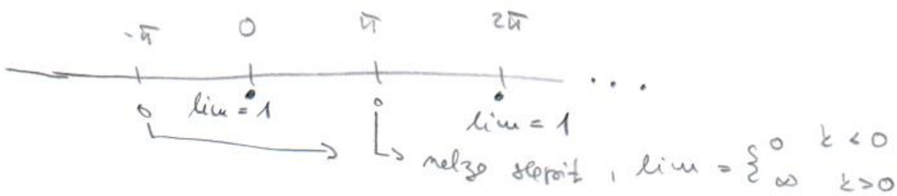
$G((1,\infty)) = \mathbb{R}$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c$$

$$|\ln y| = \underbrace{e^c}_{>0} \cdot \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|$$

$$\ln y = \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

značme $z_c(x) := y = e^{c\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}$ $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x \neq k\pi;$ $k \in \mathbb{Z}$



$x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi)$

$x \in (\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

Závěr

$$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 2k\pi] \\ z_c(x) & x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{matrix}$$

$$y_2 = \begin{cases} z_c(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, \infty) \end{cases} \qquad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{matrix}$$

$$y_3 = \begin{cases} z_{c_1}(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, 2\pi + 2l\pi] \\ z_{c_2}(x) & x \in (2\pi + 2l\pi, 3\pi + 2l\pi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ k \leq l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

2A

$$y' = \underbrace{x}_{h(x)} \underbrace{e^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}}_{g(y)}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y_0 \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$g \neq 0$ na $\left.\begin{matrix}(-\infty, 0)\\(0, \infty)\end{matrix}\right\} = J$

$$\int \frac{e^y}{\sqrt[3]{e^y - 1}}\, dy = \int x\, dx$$

$$\frac{3}{2}\underbrace{\sqrt[3]{(e^y-1)^2}}_{\in(0,\infty)} = \frac{x^2}{2} + k$$

$\sqrt[3]{(e^y-1)^2} = \frac{x^2}{3} + k \quad \rightsquigarrow$ musí být > 0

$(e^y - 1)^2 = \left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3$! pozor při odmocňování

$e^y = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3} \quad > 0$

$y = \ln\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)$

rozbor $\quad k > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \underline{y = \ln\left(1 + \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)}$

$k \leq 0 \quad x \in (-\infty, -\sqrt{-3k})$

$\qquad\quad x \in (\sqrt{-3k}, \infty)$

pro $\ln\left(\underbrace{1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}}_{>0}\right)$ máme:

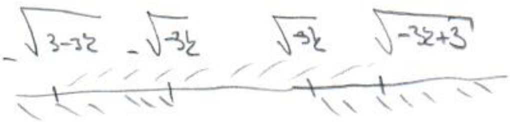
$1 > \frac{x^2}{3} + k$

$3 - 3k > x^2 > 0$

tedy fungují pro $\boxed{k < 1}$

$|x| < \sqrt{3-3k}$

$k \leq 0$:



tedy $0 < k < 1 \quad y = \ln(1 - \sqrt{\quad}), \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k})$

pro $k \leq 0 \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k})$

$\qquad\qquad x \in (\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k+3})$

Bez lepení:

$y_0 = 0 \qquad x \in \mathbb{R};$

$y_1 = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \qquad x \in \mathbb{R} \quad ; k > 0$

$y_2 = \ln(1 - \sqrt{\quad}) \qquad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}); \; k \in (0,1)$

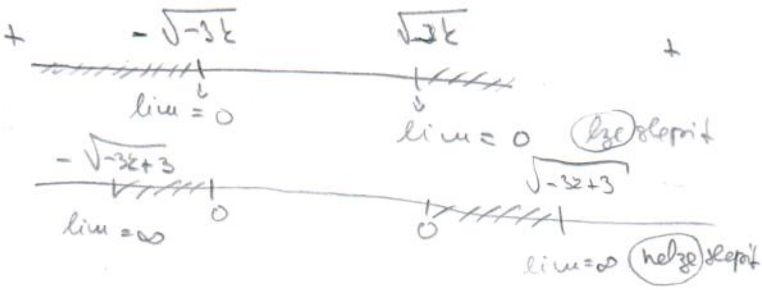
↳ nelze slepit, $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3-3k}} = \infty$

lepení

spojování

$z_k^+(x) = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \qquad k \le 0 \; :$

$z_k^-(x) = \ln(1 - \sqrt{\quad})$



kombinace: vždy $k \le 0 \quad \ell \le 0$

$$y = \begin{cases} z_k^+(x) & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} z_k^-(x) & (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+(x) & x \in (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^-(x) & (\sqrt{-3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_k^- & (\sqrt{-3\ell}, \sqrt{3-3\ell}) \end{cases} \qquad y \in \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_k^- & (\sqrt{-3\ell}, \sqrt{3-3\ell}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3\ell}, \infty) \end{cases}$$

Celkem tedy dostávám $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{2\log(d(1+e^x))}$, a to na intervale $\mathbb{R}$ pro $d \geq 1$ a na $\left(\log\left(\frac{1}{d}-1\right), \infty\right)$ pro $d \in (0,1)$.

4. krok

Lepit opět není co a kde.

7. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$. Opět vidíme, že $x \neq 0$, a tedy tím můžeme podělit. Dostaneme homogenní rovnici

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Opět provedeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, již máme spočteno, že pak $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dohromady

$$z + xz' = e^z + z,$$

tedy

$$z' = \frac{1}{x}e^z.$$

Opět separované proměnné, opět Poznámka 3.

1. krok

Funkce $\frac{1}{x}$ je definována na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok

Funkce e^z je vždy nenulová a definovaná, tedy $J = \mathbb{R}$.

3. krok

Výpočet pro $x \in I_2$, tj. $x > 0$:

$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$

Tedy

$$-e^{-z(x)} = \log x + c = \log(dx)$$

pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok

Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, potřebuju aby $-\log(dx) > 0$. Tedy $dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (0, \frac{1}{d})$. Pak

$$z = -\log(-\log(dx)) \quad d > 0.$$

3. krok

Výpočet pro $x \in I_1$, tj. $x < 0$:

$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$

Tedy

$$-e^{-z} = \log(-x) + c = \log(-dx)$$

pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok

Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, tak potřebuju aby platilo $-\log(-dx) > 0$. Tedy $-dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (-\frac{1}{d}, 0)$. Pak

$$z = -\log(-\log(-dx)), \quad d > 0.$$

5. krok
Lepit opět nikde nelze.

Nakonec to ještě shrneme, a vrátíme se k y. Dohromady to mohu napsat jako

$$y(x) = xz(x) = -x\log(-\log(dx)), \quad d \neq 0$$

na intervalech $(\frac{1}{d}, 0)$ a $(0, \frac{1}{d})$.

Poznamenejme ještě, že se to dá zapsat také pomocí konstanty c, tedy

$$y(x) = -x\log(-\log(|x|) - c), \quad c \in \mathbb{R}$$

na intervalech $(-e^{-c}, 0)$ a $(0, e^{-c})$.

3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

1. krok
Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

2. krok
g je definována všude (tj. na $\mathbb{R}$), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

3. krok
Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$

tedy

$$\frac{3}{2} y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

4. krok
Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Jeli $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

5. krok
Vidíme, že v obou případech je $\lim\limits_{x \to (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}.$$

A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y\left(1 + \log \frac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x. Dostaneme

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \log \frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):

$$z + xz' = z(1 + \log z)$$

Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):

$$z' = \frac{1}{x} z \log z$$

To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

1. krok
Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok
Nulový bod funkce $z \log z$ je 1. Tedy máme singulární řešení a dva intervaly $J_1 = (0, 1)$ a $J_2 = (1, \infty)$. (Pro $z \leq 0$ není $z \log z$ definováno.)

3. krok
Integrujeme pro $x < 0$.

$$\frac{z'(x)}{z(x) \log z(x)} = \frac{1}{x},$$

tedy pomocí substituce ž $= z(x)$

$$\int \frac{1}{\check{z} \log \check{z}} \, \mathrm{d}\check{z} \bigg|_{\check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Dále můžeme provést substituci $\check{\check{z}} = \log(\check{z})$, tedy $\check{\check{z}} = \log(z(x))$. Pak

$$\int \frac{1}{\check{\check{z}}} \, \mathrm{d}\check{\check{z}} \bigg|_{\check{\check{z}}=\log \check{z},\ \check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Tedy dohromady

$$\log(|\log(z(x))|) = \log x + c.$$

Zbavíme se 1. logaritmu (zatím může být x a $c \in \mathbb{R}$ libovolné):

$$|\log(z)| = e^{c - \log x} = e^c x.$$

4. krok
Pro $z \in J_1$, tj. $0 < z < 1$ máme $\log z < 0$, a tedy

$$z = e^{-e^c x}.$$

Pro $z \in J_2$, tj. $1 < z$ máme $\log z > 0$, a tedy

$$\underline{z = e^{e^c x}.}$$

Tedy pro $d = e^c$, dostaneme najednou řešení

$$z(x) = e^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(Interval J_1 vyhodí výsledek pro $d < 0$, interval J_2 vyhodí výsledek pro $d > 0$ a případ $d = 0$ odpovídá singulárnímu řešení.

Pro interval $I_1 = (-\infty, 0)$ bychom obdobným postupem dostali stejné řešení. Lepit zde nemusíme, neboť e^{dx} se pro $d \neq 0$ a $x \neq 0$ se singulárním řešením nikde nepotká.

Nakonec se ještě nesmíme zapomenout vrátit k y. Víme, že $y(x) = xz(x)$, tedy

$$\underline{y(x) = xe^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.}$$

$\log(k\,|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí

$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$

což vede na rovnici

$$y^2 + y(-4-kx) + (4+3kx) = 0.$$

Ta má řešení

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(4 + kx \pm \sqrt{(4+kx)^2 - 4(4+3kx)}\Big) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3,4)$, zajímá nás řešení

$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení

$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x-4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

(6) Zkoumejme chování řešení pro $x \to \frac{8}{9}+$. Pak $y(x) \to 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice

$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$

nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

3a

13.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar

$$z'x + z = z - \sqrt[3]{z+1},$$

tj.

$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$

Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

(1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

(4) Jelikož
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$
a
$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}}\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$
existuje $k > 0$ takové, že platí
$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k\,|x|).$$

(5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k\,|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení
$$z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

Pro interval $((-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení
$$z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

(6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm\frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1, a tedy lze lepit na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení
$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$
respektive
$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení
$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$
respektive
$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

13.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2 + 1)}{2x(x + 3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 1)$.

(1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení žádná nejsou.
(3) Funkce g je nenulová na $\mathbb{R}$, tj. $J = \mathbb{R}$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1 + y^2}\, \mathrm{d}y = 2 \operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x + 3)}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3}\right) \mathrm{d}x = \log\left|\frac{x}{x + 3}\right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2 \operatorname{arctg} y = \log\left|\frac{x}{x + 3}\right| + c.$$

Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x + 3}\right| + \frac{c}{2}\right) \tag{13.20}$$

na intervalech, které určíme v následujícím kroku.

(5) Nechť $I = (0, \infty)$. Funkce $2 \operatorname{arctg} y$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi, \pi)$ a $\left|\frac{x}{x+3}\right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0, \infty)$. Tedy řešíme nerovnici

$$\log \frac{x}{x + 3} + c \in (-\pi, \pi).$$

Nerovnost

$$\frac{x}{x + 3} > e^{-\pi - c}$$

není nikdy splněna, pokud $c \le -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost

$$x > \frac{3e^{-\pi - c}}{1 - e^{-\pi - c}}.$$

Druhá nerovnost

$$\frac{x}{x + 3} < e^{\pi - c}$$

je pro $c \le \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost

$$x < \frac{3e^{\pi - c}}{1 - e^{-\pi - c}}.$$