



25. cvičení – ODR se separovanými proměnnými - lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Rovnici tvaru

$$y' = g(y)h(x)$$

nazveme *ODR se separovanými proměnnými*. *Počátečními podmínkami* rozumíme rovnici $y(x_0) = y_0$.

Věta 2. Necht $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$. Necht $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá** a $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá a nenulová**. Necht $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$.

Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad x \in (a, b),$$
$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt, \quad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)h(x)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \quad x \in I.$$

Věta 3. Necht reálná funkce y je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} y'(x)$. Pak existuje $y'_+(a)$ a platí

$$y'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} y'(x).$$

Levá strana analogicky.

Lemma 4. Necht $y_1(x) = (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2(x) = (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice

$$y' = F(x, y). \tag{1}$$

Necht $\lim_{x \rightarrow x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0+} y_2(x)$. Necht $F(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0), \\ y_0, & x = x_0, \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \end{cases}$$

je řešením rovnice v celém (a, b) .

Poznámka 5 (Homogenní rovnice – převod na separované proměnné). Rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lze převést na rovnici se separovanými proměnnými substitucí $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):

(a) $y' = 2\sqrt{y}$

i. obecně

ii. $y(4) = 1$;

iii. $y(0) = -1$;

iv. $y(1) = 0$;

(b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

(c) $y' = \sqrt[3]{y}$

(d) $y' = yx$

(e) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

(f) $y'y = x^3$

(g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$

2. Příklady ze starších písemek.

(a) $y' = x\sqrt[3]{1 - y}$

(b) $y' = x\sqrt{y}$

(c) $y' \sin x = 2y \ln y$

(d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}$

Separované proměnné – homogenní rovnice

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

(b) $xy' - y(1 + \ln \frac{y}{x}) = 0$

(c) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}$