24. cvičení – ODR se separovanými proměnnými

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Diferenciální rovnicí* rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Řešením diferenciální rovnice (1) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)(x)}, y^{(n-1)(x)}, \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řešení y rovnice (1) je *maximální*, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D(y) \subsetneq D(z)$ a které se na $D(y)$ shoduje s y.

Definice 2. Nechť $h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Rovnici tvaru

$$y' = g(y)h(x)$$

nazveme *ODR se separovanými proměnnými. Počátečními podmínkami* rozumíme rovnici $y(x_0) = y_0$.

Věta 3. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$. Nechť $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ je **spojitá** a $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ je **spojitá a nenulová**. Nechť $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (c,d)$.

Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in (a,b),$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad y \in (c,d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)h(x)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a,b)$ a

$$H(x) \in G((c,d)), \qquad x \in I.$$

Hint

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (bez lepení):

   (a) $y'/y = 4x$, $y(0) = 3$

   (b) $y' = 4xy$

   (c) $y'/y^2 = e^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$

   (d) $y'/y = 1/(x-1)$, načrtněte

2. Příklady ze starších písemek (bez lepení).

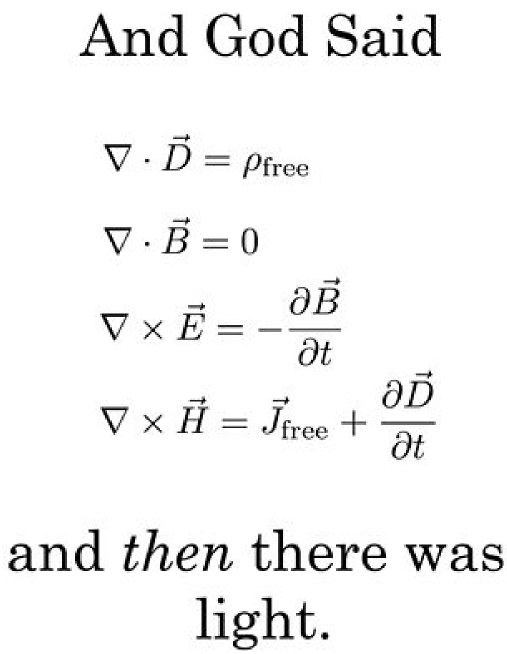
   (a) $y' = xe^x y$, $y(1) = 1$

   (b) $y'(1+x^2) = (1+y^2)$

   (c) $y' = \sin x \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

3. ✿ Je nalezena zkamenělá kost, u které se podařilo určit, že obsahuje 0.1% hmotnosti C-14, než kterou obsahovala původně. Určete stáří fosilie, víte-li, že poločas rozpadu C-14 je 5730 let.

4. Do uzavřeného školního kampusu o 1000 studentech přijel jeden z nich s chřipkou. Předpokládejme, že rychlost šíření infekce závisí jak na množství již nakažených studentů, tak na množství dosud zdravých. Určete množství studentů nakažených 6. den, pokud víte, že po čtyřech dnech bylo nakaženo již 50 studentů. (Odpovídající diferenciální rovnice: $y' = ky(1000-y)$, $y(0) = 1$, $y(4) = 50$.)



https://cz.pinterest.com/pin/511510470149523661/

(3) odpovídající ODR je $y'(t) = -ky(t)$, kde k je konstanta, kterou později najdeme