23. cvičení – Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Zformulujte Bolzano-Cauchyovu podmínku pomocí negace (integrál diverguje právě tehdy, když...).

   Řešení: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $b' \in (a, b)$ existují dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ a
   $$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq \varepsilon.$$

2. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \ln(1+x)|\cos x| \,\mathrm{d}x$, $\alpha \geq 0$.

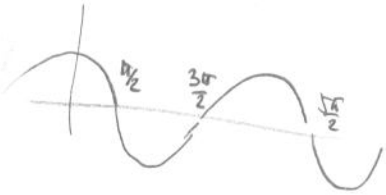
   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$, $\alpha \leq -3$.

2a

$$\int_1^\infty x^\alpha \ln(1+x)\,|\cos x|\,dx \qquad \alpha \geq 0$$

Víme: $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \ln(1+x) = \infty$, $\forall x \in [1,\infty)$ $x^\alpha \ln(x+1) \geq \ln 2$

cos x :



Zkusme intervaly $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right)$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2\pi}^{\frac{3\pi}{2}+k\pi} |x^\alpha \ln(1+x)\cos x| \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2\pi} \ln 2 \; |\cos x| = \underline{2 \cdot \ln 2}$$

Nechť $\varepsilon = \ln 2$. Pro $b' > 1$ najdeme k: $\frac{\pi}{2}+2\pi > b'$.

x_1 $\qquad x_2 = \frac{3\pi}{2}+k\pi$.

Pak $\int_{x_1}^{x_2} f = 2\ln 2 \geq \ln 2$, tedy $\int$ nesplňuje BC - podm.

2b

$$\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos\frac{1}{x}\,dx \qquad \alpha \le -3$$

Víme: f spojitá na $(0,1]$, problém u 0

lze přepsat jako $\int_0^1 x^{\alpha+2} \arctan x \cdot \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

- $\lim_{x\to 0+} x^{\alpha+2}\arctan x = \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x}\cdot x^{\alpha+3} = \begin{cases} 1 & \alpha=-3 \\ \infty & \alpha<-3 \end{cases}$

tedy pro jisté x_0: $\quad x^{\alpha+2}\arctan x > \frac{1}{2} \qquad x\in(0,x_0)$

- $$\int_{(\frac{5\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)^{-1}} x^{\alpha+2}\arctan x\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2}\int_{(\frac{5\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)^{-1}} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

od jistého k

$$\left[-\sin\frac{1}{x}\right]_{(\frac{5\pi}{2})^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2})^{-1}} = \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{5\pi}{2}\right) = +1+1 = 2$$

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{42}$ pro b' najdeme k takž, že $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)^{-1} < b'$

& $\left(\frac{5\pi}{2}+2k\pi\right)^{-1} < x_0$

Pak $\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| > 1 > \varepsilon.$

Tedy nesplňuje BC - podm.

3. Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$.

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx$

   Řešení:

   Proveďme substituci $t = x^\alpha$:

$$x = t^{1/\alpha}, \qquad dx = \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha - 1} \, dt$$

   a platí, že

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\alpha t^{1-1/\alpha}} \, dt$$

   Na pravém okolí nuly $t \in (0, \pi/2)$ je integrand kladný a můžeme zde použít srovnání s funkcí

$$\frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \approx \frac{t}{t^{1-1/\alpha}} = \frac{1}{t^{-1/\alpha}},$$

   tudíž integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^{1/\alpha - 1}} \, dt$ konverguje, a to navíc absolutně, právě když $-1/\alpha < 1$, tedy pokud $\alpha > -1$. Jinak diverguje. Obojí plyne z limitního srovnávacího kritéria. Pro kladné α tedy v okolí nuly není s konvergencí problém.

   Zbývá tak vyšetřit integrál

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \, dt$$

   O tomto integrálu víme, že konverguje absolutně, právě když $1 - 1/\alpha > 1$, tedy dohromady s prvním případem pokud $-1 < \alpha < 0$.

   Víme také, že konverguje neabsolutně, pokud $2 > 1 - 1/\alpha > 0$, tedy pokud $\alpha > 1$.

   Odtud máme, že absolutní konvergence integrálu v zadání příkladu nenastává pro žádné $\alpha > 0$ a že integrál konverguje neabsolutně pro $\alpha > 1$.

   (b) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x} \, dx$

   Řešení:

   Srovnáním s funkcí $|\cos(\pi x)|/x$ na okolí nekonečna dostaneme, že absolutně integrál nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

   Neabsolutně konverguje na $[1, +\infty)$ podle Dirichletova kritéria, neboť $\cos(\pi x)$ má omezenou primitivní funkci $|\frac{1}{\pi} \sin(\pi x)| \leq 1$ a $1/\ln^\alpha 2x \to 0$ monotónně pro každé $\alpha > 0$.

   Na okolí $1/2$ použijme odhady

$$\cos(\pi x) = \sin(\pi x - \pi/2) \approx (\pi x - \pi/2) = \pi \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\ln(2x) = \ln(1 + (2x - 1)) \approx (2x - 1) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

   a tudíž

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2^\alpha} \left(x - \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha}$$

odtud máme na absolutní i neabsolutní konvergenci (neboť integrand na $(1/2, 1]$ nemění znaménko) podmínku podle limitního srovnávacího kritéria, že $1 - \alpha > -1$, tudíž $\alpha < 2$.
Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha < 2$.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x \, dx$

Řešení:
Provedeme substituci $t = e^x$. Potom $x = \ln t$ a $dx = 1/t \, dt$, integrál tak přejde na tvar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

o němž je známo, že konverguje neabsolutně.

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$

Řešení:
Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako

$$f(x) \approx \frac{2}{x^{\alpha-2}},$$

odkud dostáváme podmínku na konvergenci $\alpha - 2 < 1$, tedy $\alpha < 3$.
Na okolí nekonečna nejprve integrand přepíšeme do jiného tvaru pomocí identity

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$$

Neabsolutní konvergence: Protože funkce $\cos x$ i $\cos 3x$ mají omezené primitivní funkce, dostaneme pomocí Dirichletova kritéria, že funkce u nekonečna neabsolutně konverguje pro všechna $\alpha > 0$.
Absolutní konvergence: Nejprve nechť $\alpha > 1$. Pak

$$\left| \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Tedy ze srovnávacího kritéria funkce absolutně konverguje.
Nyní nechť $\alpha \in (0, 1]$. Odhadujme zespodu:

$$\left| \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \right| = \frac{2 \sin^2 x |\cos x|}{x^\alpha} \geq \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(2x)}{x^\alpha} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4x)}{x^\alpha}.$$

Ale $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ je divergentní pro $\alpha \in (0, 1]$, kdežto $\int_1^\infty \frac{\cos(4x)}{x^\alpha}$ je konvergentní (z Dirichleta).
Dohromady tedy $\int_1^\infty \frac{1}{4} \frac{1-\cos(4x)}{x^\alpha}$ diverguje. A ze srovnávacího kritéria diverguje i původní integrál.
Závěr: Integrál konverguje pro $0 < \alpha < 3$, pro $1 < \alpha < 3$ navíc absolutně. Jinak diverguje.

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2} - 1} \sin \frac{1}{x^2} \, dx$

Řešení:

Na $[1,+\infty)$ integrál konverguje absolutně srovnáním s $\frac{1}{e^x}$, neboť platí, že

$$\frac{f(x)}{1/e^x} = \frac{x^a}{e^x} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{x^2}-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

neboť všechny členy konvergují k nule pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.
Absolutní konvergence u 0: Na pravém δ-okolí nuly je (pro dost malé δ)

$$\frac{1}{e^{x^2}-1} \approx \frac{1}{x^2}.$$

Uvažujme tedy nejprve integrál

$$\int_0^\delta x^{a-2} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$$

Substitucí $t = \frac{1}{x^2}$ dostaneme ekvivalentní integrál

$$\int_{1/\delta^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{a+1}{2}}}\,dt$$

o kterém víme, že:
konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.
Protože $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = 1$, máme na nějakém okolí 0 odhady

$$\frac{1}{2} \le \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \le 2.$$

Pro srovnávací kritérium pak máme

$$\left|\frac{1}{2}x^{a-2}\sin\frac{1}{x^2}\right| \le \left|\frac{x^2}{e^{x^2}-1}x^{a-2}\sin\frac{1}{x^2}\right| \le \left|2x^{a-2}\sin\frac{1}{x^2}\right|.$$

Tedy náš původní integrál u 0 konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.
Závěr: Integrál konverguje absolutně, pokud $a > 1$.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\frac{\ln x}{\ln(1+x)}x^\alpha\,dx$

Řešení:
U nuly použijte odhady

$$\ln(1+x) \approx x, \qquad x-1 \approx 1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^\delta \frac{x^{\alpha+1/3-1}}{\ln x}\,dx$$

Tento integrál konverguje pro $\alpha - 2/3 > -1$, tedy pro $\alpha > -1/3$
U jedničky použijeme odhady

$$x \approx 1, \quad \ln(1+x) \approx \ln 2, \quad \ln x \approx x-1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^{1} (x-1)^{2/3}$$

Tento integrál konverguje absolutně (funkce má do jedničky dokonce spojité rozšíření).
Závěr: Integrál konverguje pro $\alpha > -1/3$, a to absolutně.

(g) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^\alpha(x(1-x)) \sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$

Řešení:
U jedničky platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx (1-x), \qquad \sin\frac{1}{x^\alpha} \approx \sin 1$$

Protože integrand na vhodném levém okolí jedničky nemění znaménko, stačí podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřovat (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha\,dx$$

pro vhodné malé kladné δ, což je ekvivalentní vyšetřování konvergence integrálu

$$\int_0^\delta y^\alpha\,dy$$

který dostaneme substitucí $y = 1-x$. O něm víme, že konverguje pro $a > -1$.
U nuly platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx x.$$

Dále, funkce $x(1-x)$ i $(1-x)$ jsou monotónní, jejich α-té mocniny taktéž.
Ukážeme, že i funkce $\frac{1}{x}\arcsin x$ je monotónní na nějakém pravém okolí nuly.
Dále uvažujme funkci $g(x) = \frac{\arcsin x}{x}$. Ta je rostoucí na $(0,1)$:

$$\left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)' = \frac{x - \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Pro čitatele substituujme $x = \sin u$ (pracujeme na intervalu $u \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin u - u\sqrt{1-\sin^2 u} = \sin u - u\cos u$$

Ale $\sin u - u\cos u \geq 0$ protože

$$\sin u \geq u\cos u$$
$$\frac{\sin u}{\cos u} \geq u,$$

což je pravda.
Díky monotoniím pak stačí dle limitního srovnávacího kritéria a dle Abelova kritéria vyšetřovat absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\varepsilon x^\alpha \sin\frac{1}{x^\alpha}$$

pro vhodné $\varepsilon > 0$. Zasubstituujeme $y = x^{-\alpha}$ na integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} y^{-\frac{\alpha}{\alpha}} \sin y \, \mathrm{d}y = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{-2-\frac{1}{\alpha}} \sin y \, \mathrm{d}y.$$

Tento integrál absolutně konverguje pro $-2 - \frac{1}{\alpha} < -1$, tedy $a > -1$. Jiné hodnoty α není potřeba vyšetřovat (kvůli konvergenci u 1).
Závěr: pro $\alpha > -1$ integrál konverguje, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \, dx$

Řešení:
Funkce má spojité rozšíření do nuly, neboť

$$\arcsin x \approx x \implies \arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx x$$

a

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

Problematický bod je tedy pouze nekonečno. Protože $\frac{x}{x^2+1} \to 0$ pro $x \to \infty$, platí také na okolí nekonečna, že

$$\arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

Z odhadu platného pro $x > e$

$$\frac{|\cos x|}{x} \ln x \geq \frac{|\cos x|}{x}$$

vyplývá, že integrál nemůže konvergovat absolutně.
Původní integrál vyřešíme pomocí odhadu $\arcsin u \geq u$ pro $u > 0$. Dále máme pro $x > 1$ $x^2 + 1 < 2x^2$. Pak

$$\left| \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \right| \geq \left| \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \right| \geq \left| \frac{1}{2x} \ln x \cos x \right|.$$

Tedy absolutně integrál diverguje.
Pro neabsolutní konvergenci uvažujme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Protože $\frac{\ln x}{x} \to 0$ pro $x \to +\infty$ a tato funkce je na nějakém okolí nekonečna monotónní, je integrál neabsolutně konvergentní podle Dirichletova kritéria, neboť funkce $\cos x$ má omezenou primitivní funkci.
K monotonii $\frac{\ln x}{x}$. Na intervalu $(0, +\infty)$ je tato funkce spojitá a má spojitou derivaci, která je pro $x > e$ záporná, jak dostáváme přímým výpočtem:

$$\left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

Dále vyšetřeme integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} x \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Ten konverguje z Abela, protože $\frac{x^2}{1+x^2}$ je monotónní a omezená.
Nakonec uvažujme integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}} \frac{x^2}{x^2+1} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Konverguje z Abela, protože funkce $\frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}}$ je omezená (má limitu rovnu 1 nekonečnu) a monotónní. Platí, že složení dvou monotónních funkcí je také monotónní.
Pro $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ máme

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Tedy h je klesající pro $x > 1$.
Dále uvažujme funkci $g(t) = \frac{\arcsin t}{t}$. Ta je rostoucí na $(0,1)$:

$$\left(\frac{\arcsin(t)}{t}\right)' = \frac{t - \arcsin(t)\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

Pro čitatele substituujme $t = \sin u$ (pracujeme na intervalu $u \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin u - u\sqrt{1-\sin^2 u} = \sin u - u \cos u$$

Ale $\sin u - u \cos u \geq 0$ protože

$$\sin u \geq u \cos u$$
$$\frac{\sin u}{\cos u} \geq u,$$

což je pravda.
Dohromady $\frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}}$ je monotónní.
Závěr: integrál konverguje.

Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci integrálů (nemusí být absolutní)

(a) $\int_0^1 \ln(\arctan x) \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x}-1)^\alpha} \, \mathrm{d}x, \ \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\int_0^\infty \arcsin \frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^\infty \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x$

(d) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} \, \mathrm{d}x$

4a

$$\int_0^1 \ln(\arctan x)\, \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x}-1)^\alpha}\, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

f spoj. na $[\frac{1}{2}, 1)$ a $(0, \frac{1}{2}]$

u 1: $\quad e^{1-x} - 1 \approx (1-x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x \approx \sqrt{1-x}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f}{g} = \lim \underbrace{\ln(\arctan x)}_{\ln \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(1-x)^\alpha}{(e^{1-x}-1)^\alpha} = \ln\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1^\alpha$$

$\in (0, \infty)$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}} = \lim +2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 f \ \text{k} \iff \int_0^1 g$$

$$\int_0^1 g = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha} dx = \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-\alpha} dy \quad \text{k} \iff \frac{1}{2} - \alpha > -1$$

$y = 1-x$

$dy = -1\,dx$

$$\boxed{\frac{3}{2} > \alpha}$$

Závěr: $\int_{1/2}^1 f$ Ak $\iff \frac{3}{2} > \alpha$

pro $\alpha \geq \frac{3}{2}$ Div

u 0:

$$\ln(\arctan x) \approx \ln x$$

$g(x) = \ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\arctan x)}{\ln x} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{(e^{1-x}-1)^{\alpha}} = 1 \cdot \frac{\pi/2}{(e^{1}-1)^{\alpha}} \in (0,\infty)$$

$$\overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{x}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2} = 1\cdot 1$$

$$\int_0^{1/2} f \ \text{K} \iff \int_0^{1/2} \ln x \ \text{K} \qquad \int_0^{1/2} \ln x = \left[x\ln x - x\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

tedy $\int_0^{1/2} f$ K $\quad \forall \alpha$

~~Závěr~~:
$$\int_0^1 f \ \text{AK} \iff \alpha < \frac{3}{2}$$

$$\text{D} \qquad \alpha \geq \frac{3}{2}$$

45

NAK

$$\int_1^\infty \underbrace{\arcsin\frac{1}{x}\ \cos(x^2)\ \ln x}_{f(x)}\ dx$$

f spoj na $[1, \infty)$

u ∞:

$$= \int_1^\infty \arcsin\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{2x}\ \underbrace{2x\cos(x^2)}_{\text{má om PF (totiž } |\sin x^2| \le 1)}\ dx$$

$\frac{\ln x}{2x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ a je monotonní

$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} < 0$ tedy klesá

pro $x > e$

Dirichlet: $\int_1^\infty \frac{\ln x}{2x} \cdot 2x\cos(x^2)\, dx$ K

Abel: $\left|\arcsin\frac{1}{x}\right| \le \frac{\pi}{2}$

a je monot: $\frac{1}{x}$ je klesající pro $x > 0$

$\arcsin x$ je rostoucí pro $x \in [-1, 1]$

složení monot. je monot.

Tedy $\int_1^\infty \frac{\ln x}{2x} \cdot 2x\cos x^2 \cdot \arcsin\frac{1}{x}\, dx$ $\underline{\underline{K}}$

uc

(NAK)

$$\int_1^\infty \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{x-1} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1)}\, dx + \int_2^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)}\, dx$$

LSK

u 1: $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x} - 1}$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f}{g} = \lim \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)} \cos x = \lim \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} = \cos 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x}-1} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \cdot (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1)\, dx$$

LSK s $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\quad \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = \underline{\underline{2}}$ $\quad \underline{\underline{K}}$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{g}{h} = \lim_{x\to 1+} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1 = 4 \in (0,\infty)$$

Tedy $\displaystyle\int_1^2 h(x)\ AK \Rightarrow \int_1^2 g(x)\ AK \Rightarrow \int_1^2 f(x)\ AK$

u ∞: $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}}\, dx$ $\quad K$ z Dirichleta $\cos x$ má om PF ($= \sin x$)

$$\int_2^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}}\, dx \quad K \text{ z Abela}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} = 0$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ je monotónní

Závěr $\displaystyle\int_1^\infty$ K

(linearita)

2d

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)}\,dx$$

u 0: $\ln(1-x) \approx x$ $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} \approx \sqrt{x}$

$\sin(\pi x^2) \approx \pi x^2$

LSK

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\,dx \ \text{K}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|f|}{g} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\ln(1-x)|\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{\sin(\pi x^2)}}{\frac{x\sqrt{x}}{\pi x^2}} = \lim -\frac{\ln(1-x)}{x}\sqrt{1-x}\cdot\frac{\pi x^2}{\sin(\pi x^2)} = 1 \in (0,\infty)$$

$\int_0^{1/2} f$ AK $\iff \int_0^{1/2} g$ K tedy $\int_0^{1/2} f$ AK

u 1: $\sin(\pi x^2) \approx (\pi - \pi x)$ $\sqrt{x-x^2} \approx \sqrt{1-x}$

$\ln(1-x) \approx \ln(1-x)$

LSK

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)\sqrt{1-x}}{\pi(1-x)}$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x}\ \pi(1-x)}{\sin(\pi x^2)}$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\pi(1-x)}{\sin(\pi x^2)} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{-\pi}{\cos(\pi x^2)\,\pi\cdot 2x} = \frac{-1}{-1\cdot 2} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

$\int_{1/2}^1 f$ AK $\iff \int_{1/2}^1 g$ AK

$$\frac{1}{\pi}\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\sqrt{1-x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2} \frac{\ln y}{y}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2} \ln y \cdot y^{-1/2}\,dy$$

$y = 1-x$

$dy = -1\,dx$

AK z tabulky

Závěr: $\boxed{\int_0^1 f \text{ AK}}$