23. cvičení – Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a, b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \varepsilon.$$

Příklady

1. Zformulujte Bolzano-Cauchyovu podmínku pomocí negace (integrál diverguje právě tehdy, když. . .). Srovnejte s řešením na 2. straně zadání.
2. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

   (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^\alpha \ln(1 + x)|\cos x|\,\mathrm{d}x,\ \alpha \geq 0.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha \leq -3.$

3. Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in (0, \infty)$.

   (a) ♡ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x}\, dx$

   (c) ♡ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x\, dx$

   (d) ♡ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha}\, dx$

   (e) ♡ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2} - 1} \sin\frac{1}{x^2}\, dx$ AK

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\,\frac{\ln x}{\ln(1 + x)} x^\alpha\, dx$

   (g) ♡ $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^a(x(1 - x)) \sin\frac{1}{x^\alpha}\, dx$

   (h) ♡ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arcsin\frac{x}{x^2 + 1} \ln x \cos x\, dx$

Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci integrálů (nemusí být absolutní)

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(\arctan x)\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \arcsin\frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \min\{1, \sqrt{x-1}\}\frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - x)\sqrt{x - x^2}}{\sin(\pi x^2)}\,\mathrm{d}x$

Věta 3 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ že pro každé $b' \in (a, b)$ existují dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ a

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq \varepsilon.$$

(3a) substituce $t = x^\alpha$
(3c) substituce $t = e^x$
(3d) $2 \sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x$
(3e) substituce $t = x^{-2}$
(3g) $(\arcsin x)/x$ je monotónní $\to$ řešení
(3h) $(\arcsin x)/x$ je monotónní $\to$ řešení