22. cvičení - Průběh funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$\begin{cases} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Rozhodněte, zda je funkce spojitá na $[0, \infty)$.
Řešení: Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce spojitá dle věty o aritmetice a spojitosti. Pro $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \overset{VOAL}{=} \lim_{x\to 0+} x^2 \log x \lim_{x\to 0+} e^{-2x} = 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-2}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = 0.$$

Závěr: protože limita se rovná funkční hodnotě, funkce je spojitá v 0 zprava, tedy funkce je spojitá na $[0, \infty)$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$, a pokud ano, spočtěte ji.
Řešení: Zderivujeme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x \log x}{e^{2x}} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x\to 0+} x \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Závěr: $f'_+ = 0$.

(c) Rozhodněte, zda má funkce f asymptotu v ∞, a pokud ano, určete ji.
Řešení:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \log x}{e^{2x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x + 1}{2e^{2x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4e^{2x}} = 0.$$

dále

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x \log x + x}{2e^{2x}}$$
$$\underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2 \log x + 2 + 1}{4e^{2x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{8e^{2x}} = 0.$$

Závěr: asymptota existuje a je tvary $y = 0$.

(d) Rozhodněte, zda existuje $a \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (a, ∞).
Řešení: Na intervalu $x \in (0, \infty)$ máme

$$f'(x) = -2e^{-2x}x^2 \log x + e^{-2x}(2x \log x + x) = e^{-2x}x\Big(2(1-x)\log(x) + 1\Big).$$

Přímo najít nulový bod bude obtížné, spočteme tedy limitu

$$\lim_{x\to\infty} 2(1-x)\log x + 1 \overset{VOAL}{=} \infty(-\infty) + 1 = -\infty.$$

Protože limita se rovná $-\infty$, musí z definice limity existovat takové $a \in (0, \infty)$, že $f' < 0$ na (a, ∞).
Tedy podle věty o derivaci a monotonii je f klesající na (a, ∞). (A tedy monotónní.)

(e) Rozhodněte, zda existuje $b \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je konkávní na intervalu $(0, b)$.
Řešení: Na $(0, \infty)$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-2x^2 \log x + 2x \log x + x) + e^{-2x}(-4x \log x - 2xx + 2 \log x + 2 + 1) = \\ e^{-2x}(4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3)$$

$$\lim_{x\to 0+}(4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3) \overset{VOAL}{=} 0 - 0 - 0 - \infty + 3 = -\infty.$$

Tedy z definice limity musí existovat $b \in (0, \infty)$ takové, že $f'' < 0$ na $(0, b)$.
Podle věty o druhé derivaci a je tedy f konkávní na $(0, b)$.

2. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Ukažte, že je funkce f dobře definovaná.
Řešení: Musí platit

$$-1 \leq \frac{2\log x}{1 + \log^2 x} \leq 1,$$

neboli

$$-1 - \log^2 x \leq 2 \log x \leq 1 + \log^2 x.$$

Při substituci $t = \log x$ píšeme

$$-1 - t^2 - 2t \leq 0, \qquad 2t - 1 - t^2 \leq 0.$$

Lze přepsat na

$$-(t+1)^2 \leq 0, \qquad -(t-1)^2 \leq 0,$$

což ale platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a po odsubstituování pro $x \in (0, \infty)$.

(b) Rozhodněte, ve kterých bodech $x \in [0,\infty)$ existují jednostranné derivace funkce f a pro tyto body je spočtěte.

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0,\infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\log^2 x}{(\log^2 x+1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x + 1) - 2\log x \cdot \frac{2}{x}\log x}{(\log^2 x + 1)^2} = -2\frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)}$$

Protože funkce f je na $(0,\infty)$ spojitá (složení a aritmetika spojitých funkcí), najdeme derivace v e a $1/e$ z věty o limitě derivace:

$$\begin{aligned} f'_+(e) &= \lim_{x\to e+} f'(x) = -\frac{1}{e} \\ f'_-(e) &= \lim_{x\to e-} f'(x) = \frac{1}{e} \\ f'_+(1/e) &= \lim_{x\to 1/e+} f'(x) = e \\ f'_-(1/e) &= \lim_{x\to 1/e-} f'(x) = -e \end{aligned}$$

V bodě 0 najdeme derivaci zprava z definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right)}{x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0+} -2\frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0+} -2\frac{1}{x(\log^2 x + 1)} = -\infty. \end{aligned}$$

(c) Určete intervaly monotonie funkce f.

Řešení: Ze znaménka první derivace máme:

- f klesá na $(0, 1/e)$ a (e,∞),
- f roste na $(1/e, e)$.

(d) Určete obraz množiny $[0, e]$ při zobrazení f.

Řešení: Funkce je spojitá v 0 zprava (je potřeba upočítat) a její hodnota je tam $f(0) = 0$. Na intervalu $(0, 1/e)$ klesá, $f(1/e) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Na intervalu $(1/e, e)$ roste, $f(e) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Závěr: $f([0,e]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) Určete intervaly konvexity a konkavity funkce f.

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0,\infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f''(x) = \frac{2(\log x + 1)^2}{x^2(\log^2 x + 1)^2} \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)$$

Ze znaménka druhé derivace plyne, že funkce je konkávní na $(1/e, e)$ a konvexní na $(0, 1/e)$ a (e,∞).

3. Uvažujte funkci $f(x) = \sqrt{|\sin x|}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f, pokud existují.
Řešení: Úvodní rozbor:

- Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ (složení a součin spojitých funkcí).
- Funkce je periodická s periodou $T = 4\pi$.
- Funkci rozepíšeme na

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos\frac{x}{2}, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = 0 + k\pi, \\ \sqrt{-\sin x}\cos\frac{x}{2}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nyní mechanicky zderivujeme. Prve uvažujme interval $(0,\pi) + 2k\pi$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cos x\cos\frac{x}{2} + \sqrt{\sin x}(-\sin\frac{x}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + |\sin x|(-\sin\frac{x}{2})}{\sqrt{\sin x}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} - \sin x\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}. \end{aligned}$$

Na intervalu $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$ postupujeme analogicky a dostaneme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ -\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{3x}{2}}{\sqrt{-\sin x}}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nulové body - řešíme rovnici $\cos\frac{3x}{2} = 0$, neboli

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Výsledek $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. (Pozor, některé z těchto bodů vyšly ve zlomových bodech $0 + k\pi$.)

Při porovnání znamének první derivace pak vyjde

- f je rostoucí na $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$, $(7\pi/3, 11\pi/3)$,
- f je klesající na $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(2\pi, 7\pi/3)$, $(11\pi/3, 4\pi)$.

Z toho pak vyjdou extrémy v bodech:

- lok. maximum: $\{\pi/3, 2\pi, 11\pi/3\}$.
- lok. minimum: $\{0, 5\pi/3, 7\pi/3\}$.

(b) Určete obor hodnot funkce f.
Řešení: Jelikož funkce je spojitá (tedy nabývá mezihodnot), máme $H_f = [f(5\pi/3), f(\pi/3)] = \left[-\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}\right]$.

(c) Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?
Řešení: Zderivujme funkci na intervalu $(0,\pi)$:

$$f'' = \frac{-3\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(x) - \cos(x)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{4\sin(x)\sqrt{\sin(x)}}.$$

Máme tedy
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}}.$$
Protože f'' je spojitá na $(0,\pi)$, tak existuje interval (a,b), $\frac{\pi}{2} \in (a,b)$ takový, že $f'' < 0$ na (a,b). Tedy f je na (a,b) konkávní.
Závěr: hledaný interval pro konvexitu neexistuje.

4. Uvažujte funkci f zadanou předpisem
$$\begin{cases} (x^2)^{\sin x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

   (a) Najděte intervaly, kde je funkce f spojitá.
   Řešení: Prve funkci přepíšeme na
$$\begin{cases} e^{(\sin x)\ln x^2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
   Na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ je funkce spojitá z vět o aritmetice a skládání spojitých funkcí.
   V bodě 0 spočteme limitu
$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x^2} = e^0 = 1,$$
   protože
$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x^2 = 1 \cdot 0.$$
   (Druhou limitu lze upočítat l'Hospitalem.)
   Limita se tedy rovná funkční hodnotě a funkce je spojitá v 0. Závěr: funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

   (b) Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.
   Řešení: Prve spočteme f' na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$.
$$f' = x^{2\sin(x)}\left(\cos x \ln\left(x^2\right) + \frac{2\sin(x)}{x}\right)$$
   Protože funkce je spojitá v 0, lze aplikovat větu o limitě a derivaci, tedy
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} = e^{\sin x \ln x^2}\left(\cos x \ln\left(x^2\right) + \frac{2\sin(x)}{x}\right)$$
$$\overset{VOAL}{=} 1(1\cdot(-\infty)+2) = -\infty.$$
   Analogicky vyjde i $f'_-(0) = -\infty$.
   Závěr: $f'(0) = -\infty$.

   (c) Rozhodněte, zda existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\delta,\delta)$.
   Řešení: Protože $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$, musí existovat okolí $P_\eta(0)$, že $f'' < 0$ na $P_\eta(0)$.
   Díky větě o monotonii ale máme, že f je klesající na $(-\eta,0)$ a na $(0,\eta)$. Tedy není možné, aby f byla rostoucí na nějakém intervalu $(-\delta,\delta)$.

(d) Rozhodněte, zda existuje $\xi > 0$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (ξ, ∞).

Řešení: Uvažujme první derivaci

$$f'(x) = e^{\sin x \ln x^2} \left(\cos x \ln \left(x^2\right) + \frac{2 \sin (x)}{x} \right).$$

Pro všechna $x > 0$ platí

$$e^{\sin x \ln x^2} > 0.$$

Uvažujem pomocnou funkci

$$g(x) = \cos x \ln x^2 + \frac{2 \sin x}{x}$$

Pak speciálně v bodech $2k\pi$ je

$$g(2k\pi) = \cos 2k\pi \ln(2k\pi)^2 + \frac{2 \sin 2k\pi}{2k\pi} = \ln(2k\pi)^2 > 0.$$

Naopak

$$g(\pi + 2k\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) \ln(\pi + 2k\pi)^2 + \frac{2 \sin(\pi + 2k\pi)}{\pi + 2k\pi} = -\ln(\pi + 2k\pi)^2 < 0.$$

Odtud plyne, že funkce f je rostoucí v bodech $2k\pi$ a klesající v bodech $\pi + 2k\pi$.

Jelikož pro každé $\xi > 0$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $2k\pi > \xi$ tak není možné, aby funkce f byla monotónní na nějakém intervalu (ξ, ∞). Protože pokud by byla rostoucí (resp. neklesající), musela by být rostoucí (neklesající) i v bodech $\pi + 2k\pi$, což je ve sporu se zápornou derivací v těchto bodech.

Analogicky kdyby f byla klesající (nerostoucí), musela by být klesající (nerostoucí) i v bodech $2k\pi$, což je spor s kladnou derivací.

Závěr: Takové ξ neexistuje.

Bonus

5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, ale není monotónní na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.

a
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 0\cdot x = 0.$$
Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f. ♣

5.5. Teoretické příklady k derivaci funkce

5.5.1. Příklad. Definujme funkci
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$
Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. V každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme derivaci dle Věty 5.1.17 jako
$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
V bodě 0 vyjde
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
dle Věty 4.2.15. Podíváme-li se na posloupnost
$$a_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
konverguje tato posloupnost k 0, ale
$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$
Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.5.2. Příklad. Pro funkci
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases}$$
platí
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases} \tag{5.42}$$
a tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Funkce f však není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.5.1 dokážeme (5.42).

Položíme-li
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$
máme $\lim a_n = 0$ a
$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n)\right) = -\infty,$$
a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$
máme $\lim b_n = 0$ a
$$\lim_{n\to\infty} f'(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi)\right) = \infty,$$
a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

5.5.3. Příklad. Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí
$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá}, \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá}. \end{cases}$$

Řešení. Nechť $\delta \in (0,\infty)$ je takové, že $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a-\delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme
$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a+\delta).$$
Pak $g(x) = \frac{f(-x)-f(-a)}{x-a}$, $x \in (a, a+\delta)$, a použitím Věty 4.2.20 dostáváme
$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x\to a_+} g(x) = \lim_{y\to a_-} g(-y) = \lim_{y\to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{-y-a} \\ &= -\lim_{y\to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{a-(-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.5.4. Příklad. Nechť
$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

5.4.5. Poznámka. Je-li reálná funkce g rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že g je monotónní na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$. Stačí vzít $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 5.5.2, a položit $a = 0$. Potom $g'(x) = 1 + f'(x)$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále $g'(0) = 1$, a tedy g je rostoucí v 0. Funkce f' není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0, a proto v každém okolí bodu 0 funkce g' nabývá kladných i záporných hodnot. Předpokládejme nejprve, že g je neklesající na jistém okolí $B(0, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom pro každé $x, y \in B(0, \delta)$, $x \neq y$, platí
$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 0.$$
Díky větě o srovnání (Věta 4.2.9(b)) dostáváme, že $g'(y) \geq 0$ pro každé $y \in B(0, \delta)$, což je spor. Obdobný spor obdržíme, pokud předpokládáme, že g je nerostoucí na jistém okolí bodu 0.

5.4.6. Věta. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ roste (respektive neklesá) v každém bodě intervalu I (v případných krajních bodech I uvažujeme příslušné jednostranné varianty). Pak f roste (respektive neklesá) na I.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu I, a uvažujme libovolné body $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme $M = \{c \in (a, b];\ f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená množina, neboť b je horní závorou M. Funkce f je rostoucí zprava v bodě a, a proto existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta_1)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$, takové, že $f(x) < f(s)$ pro všechna $x \in P_-(s, \delta_2)$. Z definice suprema existuje $t_1 \in M \cap P_-(s, \delta_2)$, pro které tedy platí $f(a) < f(t_1) < f(s)$. Proto dostáváme $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Kdyby totiž platilo $s < b$, nalezli bychom $\delta_3 \in \mathbb{R}, \delta_3 > 0$, takové, že $f(x) > f(s)$ pro všechna $x \in P_+(s, \delta_3)$. Pak tedy libovolné $t_2 \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(t_2)$, což znamená $t_2 \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána, a tedy díky $s \in M$ máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je důkaz nerovnosti $f(a) < f(b)$ proveden.

Předpokládejme nyní, že f je neklesající v každém bodě I. Mějme dány body $a < b$ z intervalu I a zvolme pevné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Funkce $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, $x \in I$, je rostoucí v každém bodě I, tedy dle první části důkazu platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ∎

5.4.7. Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci (v případných krajních bodech I uvažujeme jednostranné derivace). Pak f roste (respektive neklesá, klesá, neroste) na I.

Důkaz. Má-li funkce v každém bodě intervalu I kladnou derivaci, je v každém bodě I rostoucí podle Věty 5.4.3. Z Věty 5.4.6 pak plyne, že f je rostoucí na I.

Ostatní případy jsou obdobné. ∎