

8. cvičení - posloupnosti

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}$

Řešení: Vytkneme nejsilnější člen, tedy $n!$, a použijeme škálu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1} \stackrel{VOAL}{=} \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0 + 1}{0 + 1} = \frac{1}{3}.$$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$

Řešení: Mohli bychom postupovat vytknutím, ale zde to jde jednodušeji. Limitu roztrhneme pomocí věty o aritmetice limit na pět kusů.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{2}{5,0001} \right)^n + \\ &+ \left(\frac{3}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{4}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{5}{5,0001} \right)^n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

neboť v každé závorce je koeficient ostře menší než jedna.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! \frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{n(n!) \frac{n^6}{n!} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 \frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{n \frac{n^6}{n!} + 1} \\ &= 1 \cdot \frac{0 + 0 + 1}{0 + 1} = 1. \end{aligned}$$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + n^3 + \frac{1}{n} + e^n + 5^n}{\ln_{10} n + n^4 + 5^n + n^3 + 4^n}$

Řešení: Vytkneme nejrychleji rostoucí člen 5^n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \frac{\ln n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{e^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}}{5^n \frac{\ln_{10} n}{5^n} + \frac{n^4}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 1}{0 + 0 + 1 + 0 + 0} = 1$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Řešení: Vytkneme $(n+1)!$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2) + 1}{(n+1)! \cdot (n+2) - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1+3/n}{1+1/n} &\stackrel{VOAL}{=} 1 \end{aligned}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n} - \sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Řešení: Rozšíříme odmocniny a pak použijeme škálu:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n} - \sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2 (\sqrt{n+5\log^2 n} + \sqrt{n+2\log^2 n})}{n+5\log^2 n - n - 2\log^2 n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\log n)^2}{3\log^2 n} \cdot \frac{\sqrt{n+5\log^2 n} + \sqrt{n+2\log^2 n}}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{5\log^2 n}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2\log^2 n}{n}} \right) \stackrel{VOAL}{=} \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Určete limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme třetí větu a budeme zjišťovat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1} + 3^{n+1}}{n^2 + 2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + (\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{3^{n+1} \frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0+\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$$

Řešení:

Najdeme odhady pro dva policajty.

$$\frac{4^n}{4} \leq 4^n - 3^n \leq 4^n + 3^n \sin(2^n) \leq 4^n + 4^n = 2 \cdot 4^n$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n \sin(2^n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 4^n}.$$

Protože máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4}} = 4$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n} = 4,$$

tak dohromady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n \sin(2^n)} = 4.$$

Jmenovatel odhadneme analogicky

$$\frac{5^n}{5} \leq 5^n - 4^n \leq 5^n + 4^n \cos(n!) \leq 2 \cdot 5^n.$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{5}} = 5$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5.$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 4^n \cos(n!)} = 5.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n \sin(2^n)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 4^n \cos(n!)}} = \frac{4}{5}.$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro $a, b, c > 0$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \cdot \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou polícajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a^2} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + (b/a)^n}}{\sqrt[n]{1 + (b/a)^{2n}}} \right) = \frac{1}{a},$$

neboť $0 < b/a < 1$, a tudíž je $\sqrt[n]{\frac{1+(b/a)^n}{1+(b/a)^{2n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+1}{1}} = \sqrt[n]{2}$, a tedy limita členu v závorce je podle věty o dvou polícajtech rovna jedné.

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1))^{n+1}}{(n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+3)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}n^{n+1}(1+3/2n)^{n+1}}{3^{n-1}n^{n-1}(1+1/n)^{n-1}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \cdot \frac{1+3/2n}{1+1/n} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Platí totiž pro každé $a > 0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \leq \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \leq \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n^2+n} - n \cdot \sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2n^2+1}}$$

Řešení: Upravíme odmocniny a vytkneme nejrychlejší člen

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n^2+n} - n \cdot \sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2n^2+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2+n) - n^2(4^n+1)}{\sqrt[n]{2n^2+1} \cdot (2\sqrt{n^2+n} + n \cdot \sqrt{4^n+1})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+4n - 4^n n^2 - n^2}{\sqrt[n]{2n^2} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) \cdot \left(2\sqrt{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + n \cdot \sqrt{4^n} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n^2}{2^n \cdot n \cdot 4^{\frac{n}{2}}} \frac{4^{1-n} + \frac{4}{4^n n} - 1 - 4^{-n}}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{2^n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^n}}\right)} \\
&\stackrel{VOAL}{=} \infty \cdot \frac{0+0-1-0}{1(0+1)} = -\infty
\end{aligned}$$

3. Spočtěte limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$$

Řešení: Upravíme odmocniny dle vzorce

$$\sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n} = \frac{3^n+2 \cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n+2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n+2^n}}$$

Odhadneme jmenovatele:

$$\sqrt{3^n} \leq \sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n+2^n} \leq 2\sqrt{3^n+2 \cdot 2^n} \leq 2\sqrt{3^n+2 \cdot 3^n} = 2\sqrt{3}\sqrt{3^n}$$

Pro limity dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\sqrt{3}\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}.$$

Ze dvou policajtů a aritmetiky limit máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}}$$

Řešení: Odhadneme

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$$

Ze dvou policajtů je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

Pro jmenovatele

$$\sqrt[2n]{4^n} \leq \sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}} \leq \sqrt[2n]{2 \cdot 4^n}.$$

Limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{4}.$$

Dohromady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}} = \frac{3}{2}.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{1 + \frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Na celkovou limitu použijeme větu o omezené a mizející posloupnosti, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = 0.$$

4. Jak to dopadne s posloupnostmi? (Divergentní znamená jak jdoucí do nekonečna, tak oscilující.)

- (a) Necht' posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Řešení: Ano, součet je divergentní. Ne, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, pak $x_n y_n = 1$, což je konvergentní posloupnost.

- (b) Necht' posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Řešení: Nemusí být. Např. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, pak $x_n + y_n = 0$ a $x_n y_n = -1$.

- (c) Necht' $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_n y_n) = 0$?

Řešení: Nikoli, např. $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = n$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 1$.

- (d) Necht' $\lim(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?

Řešení: Také ne. Necht' x_n je posloupnost, která má na lichých pozicích 0 a na sudých 1. Naopak necht' y_n má na sudých pozicích 0 a na lichých 1. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, ale ani jedna posloupnost nemá nulovou limitu.