12. cvičení - 2. věta o substituci

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\cosh(x + y) &= \sinh(x) \cdot \sinh(y) + \cosh(x) \cdot \cosh(y) \\
\sinh(x + y) &= \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y) \\
\cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \\
\cosh(x) - \sinh(x) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

2. Hyperbolické:

   (a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

3. Směs

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3}$

   (c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

- (1a) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
- (1b) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
- (1c) $x = a \sin t$ nebo...
- (1d) $x = a \sinh t$ nebo $a \tan t$
- (2a) $x = a \sinh t$
- (2b) $x = a \cosh t$
- (2c) $x = \sqrt{2} \cosh t$
- (2d) $x = a \sinh t$
- (3a) $y = \sqrt{1 + e^x}$, tedy $x = \ln(y^2 - 1)$
- (3b) $y = \sqrt{4x - 7}$, tedy $x = (y^2 + 7)/4$
- (3c) $y\sqrt{x}$, tedy $y^2 = x$
- (3d) $y = \sqrt[6]{x}$, tedy $y^6 = x$