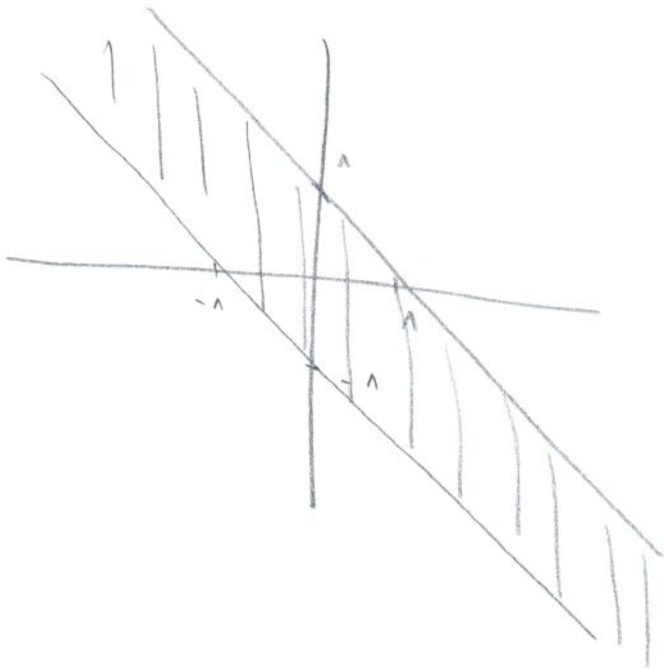
$$f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq x+y \leq 1$$

$$y \leq 1-x$$

$$-1-x \leq y$$



$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{|x|-|y|}\right)$$

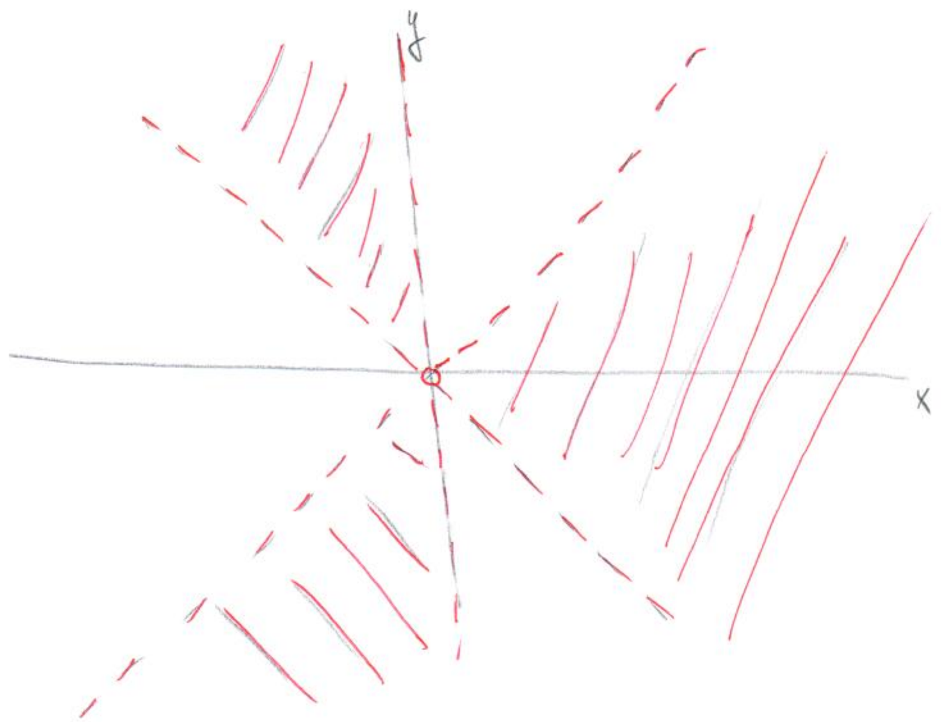
- $|x| - |y| \neq 0$ $\qquad x \neq 0$

  $|x| \neq |y|$

- $$\frac{x}{|x|-|y|} > 0$$

$x > 0$ & $|x|-|y| > 0$ $\qquad x < 0 \qquad |x|-|y| < 0$

$|x| > |y| \qquad |x| < |y|$



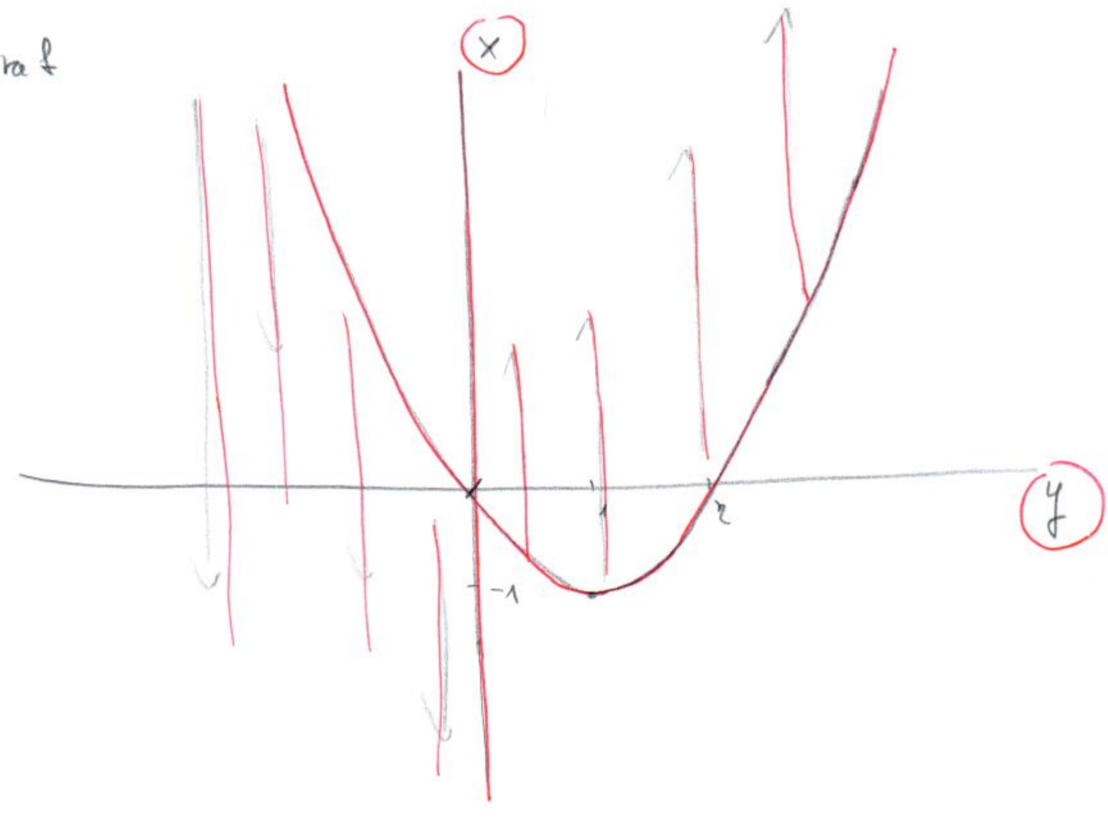
$f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$

- $y = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
- $x = y^2 - 2y$
- $x \geq y^2 - 2y \ \& \ y \geq 0 \qquad x \leq y^2 - 2y \ \& \ y \leq 0$

$x \geq (y-1)^2 - 1 \qquad x \leq (y-1)^2 - 1$

graf



$f(x,y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

- $x(x+y) \geq 0$

(a) $x \geq 0$ $\quad (x+y) \geq 0$

$y \geq -x$

nebo

(b) $x \leq 0$ $\quad x+y \leq 0$

$y \leq -x$

(c) $x = 0$ $\quad y \in \mathbb{R}$

- $-1 \leq \sqrt{x(x+y)} \leq 1$

$x(x+y) \leq 1$

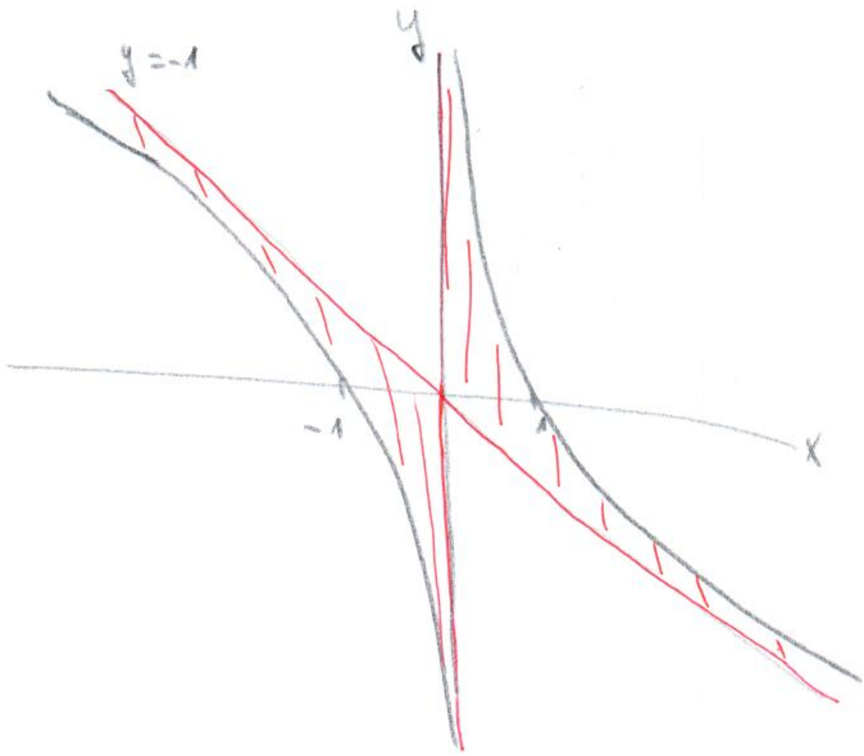
$x^2 + xy \leq 1$

$xy \leq 1 - x^2$

- $x = 0 \to y \in \mathbb{R}$

- $x > 0$ $\quad y \leq \frac{1}{x} - x$

- $x < 0$ $\quad y \geq \frac{1}{x} - x$



4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. Vypočtěte

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:
Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes y (resp. x) nám stačí počítat pro hodnoty parametru x (resp. y) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$). Platí, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru"x různou od nuly je funkce (proměnné y) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $y = 0$ máme

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = 1.$$

Obdobně vypočteme

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru"y různou od nuly je funkce (proměnné x) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $x = 0$ máme

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = -1.$$

Protože dvojnásobné limity existují a nerovnají se, nemůže dvojná limita existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

   (b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:

Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce $f(x,y)$ je jako funkce proměnné y pro pevnou hodnotu $x \neq 0$ spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Obdobně dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{0+(0-y)^2}\right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce $y = x$ pro $x \to 0$ (potom samozřejmě také $y \to 0$). Máme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+(x-x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce $y = x$ a dvojnásobné limity (tj. limity po svislé a vodorovné ose) existují a nejsou shodné, dvojná limita nemůže existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

(c) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{neexistují,}$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ vzhledem k definičnímu oboru funkce } f \text{ existuje a je rovna nule.}$$

Řešení:

Uvědomme si, že pro žádné $x \neq \frac{1}{\pi k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neexistuje limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li $y_n = 1/2\pi n$, potom

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = (x+0)\sin\frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ze zcela stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit.

Naopak dvojná limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

sice neexistuje vzhledem k $\mathbb{R}^2$ (protože funkce f není definována ani na jedné ze souřadných os, a proto není definována na žádném prstencovém okolí počátku), ale vzhledem k definičnímu oboru funkce f je nulová. To proto, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0+0 = 0,$$

neboť polynom $(x+y)$ je spojitá funkce, a dále protože, že funkce $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je omezená. Tudíž podle lemmatu o součinu funkce s nulovou limitou a funkce omezené je výsledná limita opravdu nulová.

Kapitola 3

Metody výpočtů limit funkcí

3.1 Vlastní limity

Při počítání limit funkcí více proměnných si počínáme podobně jako u funkcí jedné proměnné. Nyní si shrneme a ukážeme na příkladech početní postupy, které budeme používat.

- Pokud máme funkci spojitou v limitním bodě, pak lze hodnotu limity získat pouhým dosazením bodu do funkčního předpisu.

Příklad 3.1.1. Vypočtěte:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2}.$$

Řešení: Do lomeného výrazu dosadíme bod $(1,2)$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2} = \frac{2 - 2^3 + 1}{(-1)^2} = -5.$$

- U racionálních lomených výrazů někdy pomůže, když dané polynomy v čitateli a jmenovateli rozložíme a zlomek upravíme tak, abychom se zbavili nežádoucích výrazů ve zlomku.

Příklad 3.1.2. Vypočtěte následující limity.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy}$$

Řešení: Danou limitu vypočteme rozložením polynomu v čitateli a vytýkáním ve jmenovateli:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y) + 3(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$$

Řešení: K vypočítání limity je třeba rozložit polynom v čitateli:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2} = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y-2)(x+y+2)}{x+y+2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} (x+y-2) = -4.$$

- U lomených funkcí, které obsahují součet nebo rozdíl s odmocninami, vhodně rozšíříme.

Příklad 3.1.3. Vypočtěte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

Řešení: Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

- U některých funkcí si můžeme danou limitu zjednodušit zavedením vhodné substituce (viz následující příklad). Tímto krokem převedeme výpočet na určení limity funkce jedné proměnné.
  Při důkazech o existenci či neexistenci limity funkce používáme substituce

  $$y = kx, \quad \text{když} \quad x \to 0, y \to 0,$$

  $$y = k(x-x_0) + y_0, \quad \text{pokud} \quad x \to x_0, y \to y_0$$

  nebo jiné. Tato metoda výpočtu byla použita při rozhodování o existenci limity (např. u příkladu 2.2.4).

Příklad 3.1.4. Vypočtěte:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}$$

Řešení: Ze zadání je vidět, že k odstranění odmocnin nás přivede substituce $t^6 = x^2+y^2-2x+2$. Zřejmě $x^2+y^2-2x+2 = (x-1)^2+y^2+1$ a $(x-1)^2+y^2+1 \neq 1$ pro (x,y) z ryzího okolí bodu $(1,0)$. Po dosazení limitního bodu zjistíme, že budeme počítat limitu pro $t \to 1$. Při tomto výpočtu je použita věta 2.2.4, která nám umožňuje získat výsledek (nemusíme zde ověřovat existenci limity jako např. při použití polárních souřadnic a věty 2.2.13):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = $$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

Řešení: Tento typ příkladu zkusíme vypočítat pomocí substituce $y = kx+1$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+(kx+1)(kx+1-1)^2}{x^2+(kx+1-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+(kx+1)k^2x^2}{x^2+k^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+(kx+1)k^2}{1+k^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2} = 1.$$

V tomto případě nelze použít věty o limitě složené funkce a z výsledku můžeme vyvodit jen to, že daná limita *může* existovat a rovnat se 1. Příklad tedy dopočítáme zavedením polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = 1+\rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi(\rho\sin\varphi+1)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2+\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+}(1+\rho\sin^3\varphi) = 1.$$

Dále musíme dokázat podmínku věty 2.2.13, aby daná limita existovala:

$$|f(\rho\cos\varphi, 1+\rho\sin\varphi)-1| = |\rho\sin^3\varphi| \le 2\rho, \quad \text{protože} \quad |\sin\varphi| \le 1.$$

Přitom $\lim_{\rho\to 0^+} 2\rho = 0$. Daná limita existuje a je rovna 1. Z tohoto příkladu je vidět, že substituce typu $y = kx$ bez vhodné dodatečné podmínky dokazují pouze neexistenci limity (i přestože se nyní výsledek shoduje, viz text na straně 21).

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2}$$

Řešení: Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2} = \lim_{y\to 2} y \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{[|x|+(y-2)^2]y}.$$

Příklad rozdělíme na dvě části. První limita je po dosazení rovna 2. Druhá limita se vypočítá pomocí substituce $t = [|x|+(y-2)^2]y$ a použitím L'Hospitalova pravidla. Je zřejmé, že

$|x|+(y-2)^2 \neq 0$ v ryzím okolí bodu $(0,2)$. Tato druhá limita je podobná limitě z příkladu a), zde je využita také znalost věty 2.2.4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{[|x|+(y-2)^2]y} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1.$$

Pokud oba výsledky sjednotíme, dostaneme hodnotu počítané limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2} = 2\cdot 1 = 2.$$

- V jiných případech je výhodné provést transformaci do polárních souřadnic, kde využíváme věty 2.2.13 (viz příklad 2.2.4). U těchto příkladů se snažíme zjednodušovat funkce pomocí goniometrických vzorců. Nejdůležitější jsou tyto vzorce:

$$\begin{aligned}
&\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\\
&\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,\\
&\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

Poznámka 3.1.1. Pokud počítáme limitu funkce tří proměnných, můžeme využít transformaci do *sférických souřadnic* (stejně jako transformaci do polárních souřadnic u limity funkce dvou proměnných). Vztahy pro transformaci do sférických souřadnic jsou následující:

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta,$$

kde ρ udává vzdálenost bodů (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z) (sférický poloměr), φ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (azimutární úhel), ϑ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (sférický úhel). Tuto transformaci lze využít zejména při důkazu neexistence limity, tj. když nám limita vyjde závislá na φ nebo ϑ.

Nyní uvedeme větu pro existenci limity funkce po zavedení sférických souřadnic, která je obdobná větě 2.2.13.

Věta 3.1.1. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že*

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0+\rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0+\rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0+\rho\cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi), \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$, pak

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L.$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\operatorname{tg} f(X)}{f(X)} = 1,$$
$$\lim_{X \to X_0} \frac{\ln\big(1 + f(X)\big)}{f(X)} = 1,$$
$$\lim_{X \to X_0} f(X) \cdot \ln|f(X)| = 0,$$
$$\lim_{X \to X_0} [1 + k \cdot f(X)]^{\frac{1}{f(X)}} = e^k, k \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.1.6. Vypočítejte:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$$

Řešení: Budeme chtít využít zmíněných typových limit:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \cdot \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2}.$$

Nyní rozložíme příklad na dvě části. U prvního vztahu využijeme typovou limitu z předchozího bodu. Protože platí, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \sqrt{(x-4)^2 - y^2} = 0, \quad \text{pak} \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = 1.$$

Teď zbývá vypočítat poslední část součinu:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Z těchto dílčích výpočtů již vyplývá výsledek naší limity:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(5,5)} (1 - y + x)^{\frac{4}{x-y}}$$

Řešení: Příklad vyřešíme na základě poznatků uvedených v minulém bodě:

$$\lim_{(x,y)\to(5,5)} (1 + x - y)^{\frac{4}{x-y}} = \lim_{(x,y)\to(5,5)} \left[(1 + x - y)^{\frac{1}{x-y}}\right]^4.$$

Protože platí

$$\lim_{(x,y)\to(5,5)} (x - y) = 0, \quad \text{pak} \quad \lim_{(x,y)\to(5,5)} (1 + x - y)^{\frac{1}{x-y}} = e.$$

Poznámka

Následující úlohy, a to především úlohy k samostatnému řešení a úlohy obsažené v kontrolním testu, jsou určeny především pro zájemce o tuto problematiku. Podstatné je, aby jste si uvědomili základní rozdíl mezi limitou funkce jedné a limitou funkce více proměnných.

Řešené úlohy

(1a)

Příklad 4.3.1. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}.$$

Řešení: Dosadíme limitní bod, tedy

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{2+2\cdot 4}{2\cdot 2+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

(1b)

Příklad 4.3.2. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}.$$

Řešení: Postupným upravováním dostaneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = „\tfrac{0}{0}“ = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)(x+1)}{(x+1)(y^2+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = 2.$$

(1c)

Příklad 4.3.3. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Řešení: K bodu $[0,0]$ se budeme blížit po přímkách, tj. cestu volíme po přímkách obsahujících bod $[0,0]$. Takové přímky mají rovnice $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr. Bude-li řešení záviset na parametru k, limita neexistuje. Dosadíme a dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

(1c) Limita závisí na parametru k. Pro různé hodnoty k dostáváme různou hodnotu limity. Limita proto neexistuje. Pokud limita nebude záviset na parametru k, pak o existenci limity nemůžeme nic říci. Nevíme, jestli existuje nebo neexistuje. Důvod je ten, že přímky tvoří pouze část možností, jak se k limitnímu bodu můžeme blížit.

(1d) **Příklad 4.3.4.** Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}.$$

Řešení: K vypočítání této limity použijeme následující **větu o dvojnásobné limitě.**

Věta 4.3.1.
Jestliže existují limity

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=a_1,\ \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)=a_2,\ \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)=a,$$

pak $a=a_1=a_2$.

Prakticky postupujeme tak, že si vybereme jednu proměnnou, např. proměnnou y, druhou pak považujeme za konstantu. Počítáme limitu funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na y. Dostaneme výraz, který již nebude obsahovat proměnnou y, ale pouze x. Nyní x budeme chápat jako proměnnou a vypočítáme limitu z funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na x, získáme hodnotu a_1,

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to2}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right)=\lim_{x\to1}\frac{4x^2-4}{x^4+16-17}\\ &=\lim_{x\to1}\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{4}{(x^2+1)}=2. \end{aligned}$$

Totéž uděláme pro obě proměnné v opačném pořadí a dostáváme hodnotu a_2,

$$a_2=\lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to1}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right)=\lim_{y\to2}\frac{y^2-4}{(y^2+4)(y^2-4)}=\lim_{y\to2}\frac{1}{(y^2+4)}=\frac{1}{8}.$$

Vidíme, že $a_1\neq a_2$, limita neexistuje. Pozor, jestliže $a_1=a_2$, pak o existenci

(1d) limity se opět nedá nic říci. Může, ale také nemusí existovat.

Na závěr kapitoly si nadefinujeme spojitost funkce dvou proměnných.

Definice 4.3.4.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá v bodě** $[x_0, y_0] \in D_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá**, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,6]} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$.
2. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}]} \sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.
3. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)}$.
4. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(y+1)}{2x+3y}$.
5. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4}$.
6. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3-y^2}{xy-y^3}$.
7. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,-3]} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}$.
8. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]} \frac{2x+1}{x+y+1}$.
9. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y}$.
10. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y+1)(x^2-y+1)-1}{y}$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. -3.
2. $\frac{3}{4}$.

Příklad č. 22 Vypočtěte $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x}$.

Řešení: Celou funkci rozšířím výrazem $\frac{yz}{yz}$ a vzniklou funkci rozdělím podle věty 3.2.4. Zvolím si substituci $t = xyz$. Následně lze u funkce opět najít podobnost se vzorcem pro výpočet limity funkce jedné reálné proměnné ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Po složení jednotlivých funkcí dostanu limitu rovnou 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x}\cdot\frac{yz}{yz} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz}\cdot yz = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz}\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{\sin xyz}{xyz} = \begin{vmatrix} t = xyz \\ t\to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} y \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} z = 0\cdot 0 = 0 \end{cases} = 1\cdot 0 = 0.$$

Příklad č. 23 Rozhodněte o existenci limity $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$, a pokud existuje, vypočítejte ji.

Řešení: Celou funkci rozšířím takzvanou chytrou jedničkou, tj. $\frac{x}{x}$. Rozložím novou funkci na dvě funkce $f(x,y) = \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}$ a $g(x) = x$, podle věty týkající se algebry limit. Při výpočtu limity funkce $f(x,y)$ využiji substituci a funkci tangens si vyjádřím pomocí funkcí sinus a kosinus. Po dosazení dostávám limitu funkce $f(x,y)$ rovnou jedné a limitu funkce g(x) rovnou 2. Tudíž je výsledná limita v bodě (2, 0) rovna dvěma.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}\cdot\frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\cdot x = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\cdot \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{xy} = \begin{vmatrix} t = xy \\ t\to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{1}{\cos t} = 1\cdot 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2 \end{cases} = 1\cdot 2 = 2.$$

Příklad č. 24 Určete limitu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x\sin\frac{1}{x-y+z}$.

Řešení: Limitu budu řešit pomocí odhadu. Mohu totiž tvrdit, že pokud vynásobím proměnnou x funkcí sinus v absolutní hodnotě, vždy dostanu číslo menší nebo rovné absolutní hodnotě z x, protože absolutní hodnota funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1. Využiji zde také znalosti věty uvedené v kapitole 3.2.10. Proto se tato limita rovná nule.

$$\left|x\sin\frac{1}{x-y+z}\right| \leq |x|$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}|x| = 0 \ \to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x\sin\frac{1}{x-y+z} = 0.$$

Příklad č. 25 Dokažte, že platí $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Řešení: K dokázání tohoto tvrzení opět použiji odhad hodnot funkcí v okolí bodu (0, 0). Nejprve si funkci rozložím na dvě funkce podle kapitoly 3.2.4. Dostanu limity: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x$ a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Je zřejmé, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$. Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ je omezená na množině $E_2 \setminus \{[0,0]\}$, protože pro všechna (x, y) z definičního oboru platí $-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Pokud ověřím tuto nerovnost, bude zřejmé, že opravdu platí pro všechna $(x,y) \neq (0,0)$. Konečně platí, že součin funkce mající limitu rovnou nule a funkce omezené je roven nule.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\to \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \ \to -2xy \leq x^2+y^2 \ \to 0 \leq x^2+2xy+y^2 \to 0 \leq (x+y)^2 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \ \to 2xy \leq x^2+y^2 \ \to 0 \leq x^2-2xy+y^2 \to 0 \leq (x-y)^2 \end{cases}$$

$$\to f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ je omezená.}$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \text{omezená funkce} = 0.$$

26. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Dokažme, že tomu tak je. Použijeme větu, která tvrdí, že limita součinu funkce jejíž limita je nula a ohraničené funkce je rovna rovněž nula. Zřejmě platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} x \cdot \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí

$$(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

27. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda polárních souřadnic dávají výsledek nula. Metodou svazku parabol ukažme, že limita nula není a tedy zkoumaná funkce je v daném bodě nespojitá.

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{(1+k^4)x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Limita L^{**} závisí na parametru k. Odtud podle věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f je v $[0,0]$ nespojitá.

(1g) **28. Příklad** Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Řešení Do funkce nelze bezprostředně dosadit. Provedeme proto vhodnou algebraickou úpravu. Výraz rozšíříme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2+1-1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

29. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Řešení Provedeme algebraickou úpravu funkce. Rozložíme čitatele i jmenovatele výrazu a provedeme pokrácení.

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} = \frac{3}{8}.$$

30. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Na základě uvedených skutečností je zřejmé, že

$$\lim_{(x,y)\to(5,5)} (1-y+x)^{\frac{4}{x-y}} = e^4.$$

- Při výpočtech se snažíme funkce různě algebraicky upravovat, abychom např. dostali součin dvou limit, kde jedna je limitou funkce jedné proměnné a druhá zjednodušená limita funkce více proměnných. Součin dostaneme následující úpravou:

$$f(X)\cdot g(X) = \frac{f(X)}{\frac{1}{g(X)}}.$$

U limity funkce jedné proměnné si můžeme vypomoci L'Hospitalovým pravidlem nebo jinými úpravami, které u funkcí více proměnných použít nemůžeme.

(1h)

Příklad 3.1.7. Vypočítejte:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}.$$

Řešení: Zavedeme substituci $t=|x|+|y|+|z|$ a použijeme větu 2.2.4. Zřejmě je $|x|+|y|+|z|\neq 0$ v ryzím okolí bodu $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t = \left|1^0\right| = \lim_{t\to 0} e^{t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}.$$

Zde musíme vypočítat limitu výrazu v exponentu, a poté dosadíme výsledek zpět. Ve výpočtu této dílčí limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{t\to 0}\left[t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right] = |0\cdot\infty| = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{2}{1+\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{t+2} = 0.$$

Pokud dosadíme tento dílčí výsledek do předešlé limity, dostáváme:

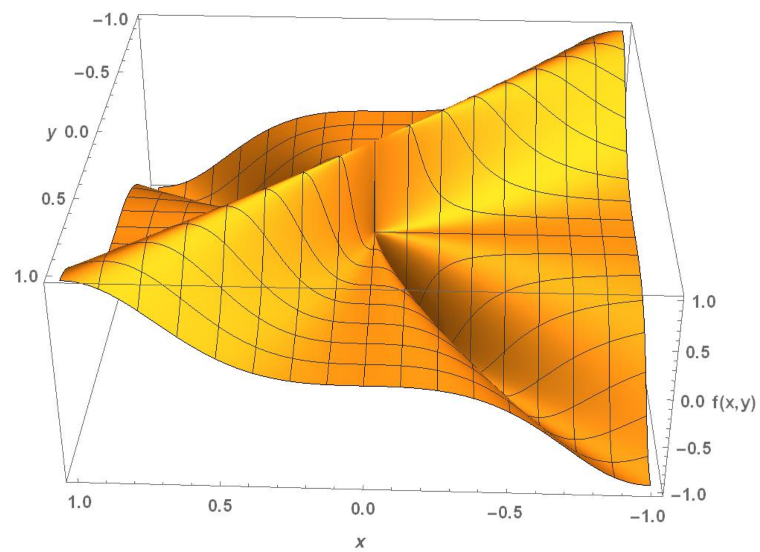
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = e^0 = 1.$$

- U úloh, u kterých potřebujeme ověřit neexistenci limity funkce, využíváme znalostí postupných limit z poznámky 2.2.2. Dále můžeme použít i substituce typu: $y=k(x-x_0)+y_0$ nebo $y=kx^2$, o kterých již byla řeč.

Příklad 3.1.8. Přesvědčte se o existenci nebo neexistenci následující limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}.$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6 + y^6} \text{ neexistuje.}$$



Obr. 6. Funkce $f(x,y) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ má v počátku neobvyklý průběh, který značí, že limita v tomto bodě neexistuje.

V daném případě graf funkce $f(x,y)$ naznačuje, že by bylo třeba prozkoumat parciální funkce $f(x,x)$ a $f(x,0)$. Je $f(x,x) = 1$ pro x ≠ 0, $f(x,x)$ = 0 pro x ≠ 0. V sebemenším okolí počátku se tedy vyskytují funkční hodnoty 1 i 0 a dvojná limita nemůže existovat.

Příklad č. 17 Zjistěte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení: Pokud vypočtu dvojnásobné limity této funkce, zjistím, že jedna z těchto limit neexistuje. Proto limita funkce $f(x,y) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2+y^2}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + 0}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = \text{neexistuje.}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot \sin\frac{1}{0} + y^2}{0 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

Závěr: Je $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$. Fakt, že první činitel má limitu nula, je zcela jasný a funkce $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ je omezená. Proto

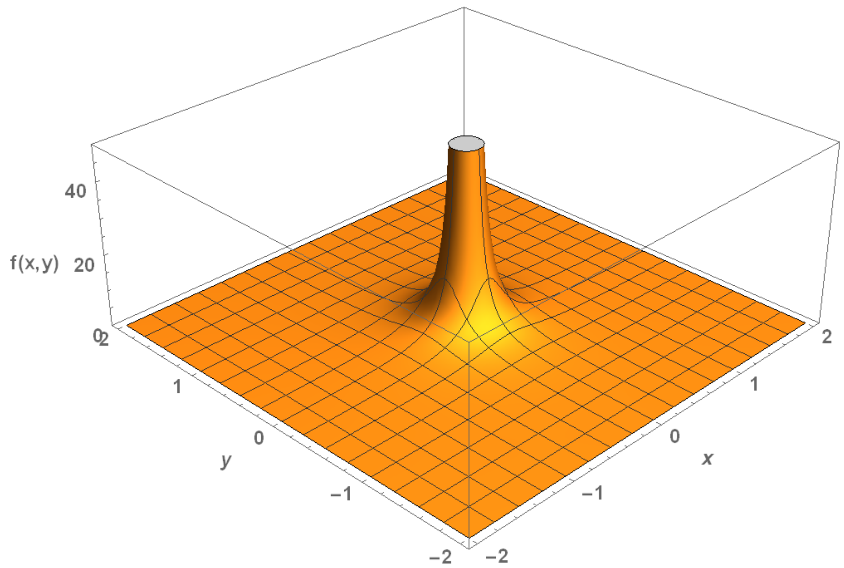
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 18 Vypočítejte limitu v bodu $[0, 0]$ funkce $\frac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení: Daná funkce má definiční obor $D(f) = \mathrm{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$, proto nelze postupovat stejně jako v příkladech, kde jen dosadím za proměnné. Při řešení této limity použiji převod z kartézských souřadnic do souřadnic polárních. Po této transformaci se ve jmenovateli objeví známý vzorec pro počítání s goniometrickými funkcemi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Po uvedené úvaze je již zřejmé, že limita této funkce v daném bodě je rovna nekonečnu.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho, \varphi \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \varphi \to 0}} \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \varphi \to 0}} \frac{1}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$



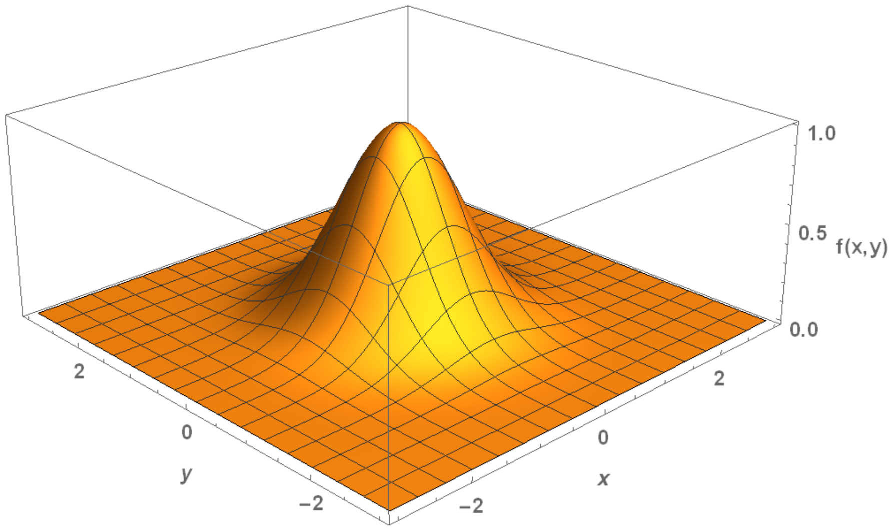
Obr. 7. V okolí bodu (0, 0) funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ roste nade všechny meze, to znamená, že limita je v tomto bodě rovna nekonečnu.

g) Dále je možné využít odhadu pomocí funkcí (posloupností), o jejichž průběhu v daném bodě mám představu a liší se jen málo od původní funkce.
(Příklad č. 24, Příklad č. 25, Příklad č. 26, Příklad č. 27)

Příklad č. 4 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2}$.

Řešení: Tuto limitu lze jednoduše vyřešit tím, že za neznámé *x, y* dosadím hromadný bod (0, 0), protože daná funkce je spojitá v celém prostoru E_2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2} = e^{-0-0} = e^0 = 1.$$



Obr. 3. Graf funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, ze kterého je patrné, že v bodě (0, 0) má limitu rovnou hodnotě 1.

Příklad č. 5 Určete $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5}$.

Řešení: Funkce je v bodě (2, 1) definována a spojitá, proto mohu za neznámé *x, y* dosadit tento hromadný bod a limitu nalézt.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5} = \frac{2+6}{3\cdot 2-1+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Příklad č. 6 Stanovte limitu funkce $f(x,y,z) = x^3y^2z$ v bodě (1, 2, 1).

Řešení: Funkci lze pomocí algebry limit rozdělit na součin spojitých funkcí $g(x,y,z) = x^3, h(x,y,z) = y^2, i(x,y,z) = z$. Poté lze dosadit limitní bod a limitu vypočítat.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3y^2z = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} y^2 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} z = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.$$

Příklad č. 7 Přesvědčte se, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = 4$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ není definována v bodě (0, 0) a podle „úzké“ definice limity ještě na osách *x, y*. Podle této definice limita funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ v bodě (0, 0) neexistuje, protože v každém redukovaném okolí bodu (0, 0) existuje nekonečně mnoho bodů, ve kterých neexistuje funkční hodnota. Funkční hodnoty by se ale bez výjimek měly blížit k hodnotě limity. Nyní přistoupím k prozkoumání chování limity na množině $\mathrm{E}_2 \setminus \{(0,0)\}$. Nejjednodušší možnost, jak dojít k výsledku, je rozšířit celý výraz „chytrou“ jedničkou. Poté už snadnými algebraickými úpravami vypočítám limitu funkce $f(x,y)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{xy+4}+2}{\sqrt{xy+4}+2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\cdot(\sqrt{xy+4}+2)}{xy+4-4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\cdot(\sqrt{xy+4}+2)}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{xy+4}+2\right)$$

$$= \sqrt{0\cdot 0+4}+2 = 4.$$

Příklad č. 11 Rozhodněte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení: Bod (0, 0) je bodem nespojitosti funkce $\frac{x+y}{x-y}$. Opět se budu snažit dokázat, že existuje taková křivka, že pokud se po ní budu blížit k bodu (0, 0), tak dostanu jinou hodnotu než při přibližování po jiné křivce. Tím dospěji k tomu, že funkce $\frac{x+y}{x-y}$ nemá v bodě (0, 0) limitu. Nejdříve substituuji rovnicí paraboly ($y = kx^2$). Po dosazení dostanu hodnotu 1. Limita proto může existovat, ale již při dosazení rovnice přímky ($y = kx$) se ve výsledku vyskytuje parametr k, takže je tato limita pro různé hodnoty směrnice různá. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.

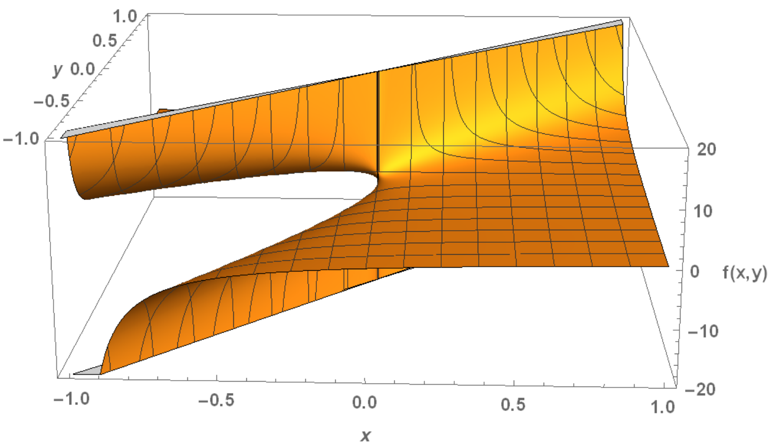
- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+kx)}{x(1-kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+kx}{1-kx} = 1.$$

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+k)}{x(1-k)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k}{1-k}, \text{pro } k \neq 1.$$

$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.



Obr. 5. Grafické znázornění funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$. Zde je patrné, že limita v bodě (0, 0) nemůže existovat.

Příklad č. 12 Vypočtěte $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ není definována nejen v bodě (0, 0), ale ani na přímce o rovnici $y=-x$. Z toho je jasné, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ neexistuje podle „úzké“ definice limity.

Pokusím se zjistit, co se děje v těsném okolí přímky o rovnici $y=kx$, a také v těsném okolí paraboly o rovnici $y=kx^2$. V obou případech vyjde limita rovna nule, to znamená, že limita může existovat. Vyšetřím funkční hodnoty v bodech $(x,-x+x^2)$, $(x,-x-x^2), x\neq 0$. Tyto body volím proto, že se k přímce $y=-x$ přibližují velmi blízko, protože pro malé hodnoty *x*, je druhá mocnina tohoto čísla velmi malá. Pro bod $(x,-x+x^2)$ jsou pro $x\to 0$ v každém okolí bodu (0, 0) funkční hodnoty blízké číslu dva. Pokud se přibližuji k přímce $y=-x$ „zezdola“ (bod $(x,-x-x^2)$), je vidět, že se funkční hodnoty v okolí bodu (0, 0) blíží k hodnotě -2. To znamená, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ počítaná vzhledem k definičnímu oboru této funkce neexistuje.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^2}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2)}{x(1+k)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2)}{1+k}=0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^4}{x+kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2x^2)}{x(1+kx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2x^2)}{1+kx}=0.$$

- Substituce $y=-x+x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x+x^2)^2}{x+(-x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2-2x^3+x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}(2-2x+x^2)=2-2\cdot 0+0$$
$$=2.$$

- Substituce $y=-x-x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x-x^2)^2}{x+(-x-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^3+x^4}{-x^2}=\lim_{x\to 0}(-2-2x-x^2)=-2-2\cdot 0-0$$
$$=-2.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}\ \text{neexistuje.}$$

Příklad č. 13 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$.

Řešení: Opět nejprve prostuduji, co se děje, kdybychom se přibližovali do počátku po přímkách a parabolách. Obě tyto limity vyjdou rovny nule. Když ale studuji křivku $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (pro $x > 0$), po algebraických úpravách zjistím, že když postupuji do bodu (0, 0) po této křivce, nachází se na ní body s funkčními hodnotami rostoucími k nekonečnu. Dvojná limita proto existovat nebude.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xk^2x^2}{x^2+k^6x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{x^2(1+k^6x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x}{1+k^6x^4} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xk^2x^4}{x^2+k^6x^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^5}{x^2(1+k^6x^{10})} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{1+k^6x^{10}} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{xx^{\frac{1}{3}}}{x^2+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^6} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 14 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-5y}{7x+y}$.

Řešení: Definiční obor funkce je $E_2\setminus\{[0,0]\}$. V tomto příkladu využiji okolnosti, že pokud se dvojnásobné limity nerovnají, tak limita dané funkce neexistuje. Vypočítám proto dvojnásobné limity, a protože jsou navzájem různé, mohu říci, že daná limita neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-5y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-5}{1} = -5.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-5y}{7x+y} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 15 Přesvědčte se, že pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, je rovna nule.

Řešení: Nejprve určím dvojnásobné limity. Tyto limity se rovnají, limita proto může existovat. O existenci se přesvědčím substitucí *y* = *kx*. Limita po úpravách opět vyjde rovna nule. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje a je rovna 0.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5}=\frac{2\cdot 0}{5}=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{7y^2}{-8y}=\lim_{y\to 0}\frac{-7y}{8}=\frac{-7\cdot 0}{8}=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}=|y=kx|\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7k^2x^2}{5x-8kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+7k^2)}{x(5-8k)}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{2+7k^2}{5-8k}=0.$$

Závěr: Pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, platí

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}=0.$$

Příklad č. 16 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$.

Řešení: Po výpočtu dvojnásobných limit mohu tvrdit, že limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ může existovat, protože se tyto dvojnásobné limity rovnají, respektive obě jsou rovné 0. Dále zkusím do limity dosadit za proměnnou *y* svazek přímek (*y* = *kx*). Po algebraických úpravách ale vyjde tato limita závislá na směrnici *k*. Proto limita funkce $f(x,y)=\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\cdot 0}{x^6+0}=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot y^3}{0+y^6}=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}=|y=kx|=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3k^3x^3}{x^6+k^6x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2k^3x^6}{x^6(1+k^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{2k^3}{1+k^6}$$

$$=\frac{2k^3}{1+k^6}.$$

kdy bod $[x_0, y_0]$ nazýváme pólem. Výhodou tohoto popisu je, že potom limitní přechod $[x, y] \to [x_0, y_0]$ lze nahradit limitním přechodem $\rho \to 0$. Uvedený postup ilustruje následující ukázka.

aα

Příklad 5 *Vypočtěte limitu* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Protože v tomto případě funkční hodnota neexistuje (po dosazení je ve jmenovateli 0), použijeme transformaci do polárních souřadnic. Po nahrazení proměnných x, y má funkce tvar:

$$\frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1-\cos^2(\rho^2)}{\rho^4},$$

proto výpočet uvedené limity nahradíme výpočtem limity funkce jedné proměnné a při výpočtu můžeme použít aparát funkce jedné proměnné, v tomto případě L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos^2(\rho^2)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho\sin(\rho^2)\cos(\rho^2)}{4\rho^3}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} \cdot \lim_{\rho\to 0} \cos(\rho^2) = 1$$

Poznamenejme, že v případě kdy výsledek závisí na φ limita neexistuje viz. ukázka 2.2. Dále je nutné uvědomit si, že limitní přechod pro $\rho \to 0$ musí obecně zohlednit i možnou závislost $\varphi(\rho)$, viz ukázka 2.3. Analogicky lze postupovat i u limity funkce 3 proměnných s využitím sférických souřadnic.

1.4 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

Definice 4 *Parciální derivací funkce $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ v bodě $A = (a_1, ..., a_n)$ podle proměnné x_i rozumíme derivací funkce jedné proměnné $y(x) = f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ v bodě a_i. Tuto derivaci zapisujeme dvěma možnými způsoby:*

$$f'_{x_i}(A) \quad nebo \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).$$

Tedy všechny proměnné kromě proměnné x_i „zafixujeme",tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné x_i. Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace se omezíme pouze na funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$. V tomto případě „zafixování" proměnné x, resp. y značí omezit se na rovinu $x = x_0$, resp. $y = y_0$. Potom ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0]$ k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $x = x_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku

Jestliže funkce $y = f(X)$ má definovanou parciální derivaci podle proměnné x_i v každém bodě množiny M,je funkce přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace nazývána parciální derivací funkce $y = f(X)$ podle proměnné x_i, což

EVALUATING LIMITS WITH POLAR COORDINATES

PAOLO MASULLI

Let f be a function $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, such that $(0,0)$ is a limit point of D. We want to evaluate its limit for $(x,y) \to (0,0)$. One method is to use **polar coordinates** centered at the origin, via the substitution

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.}$$

This way we get a new function $(r,\theta) \mapsto F(r,\theta)$ and evaluate its limit for $r \to 0^+$. In fact this corresponds to $(x,y) \to 0$ in f. But there is some extra condition to verify, to be able to conclude that the limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ is the same of $\lim_{r\to 0^+} F(r,\theta)$.

TEORIE

Theorem 1. *We have*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l,$$

(for l finite or $\pm\infty$) if and only if

$$\lim_{r\to 0^+} F(r,\theta) = l$$

***uniformly** in θ, for $\theta \in [0,2\pi)$.*

"Uniformly" here means that $F(r,\theta)$ has to approach l as r approaches 0, independently of the value of $\theta \in [0,2\pi)$.

9b

Example 2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. After passing to polar coordinates, we get

$$\lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta.$$

By the usual inequalities $-1 \le \cos\theta, \sin\theta \le 1$, we get that $-1 \le \cos^2\theta\sin\theta \le 1$, and so

$$-r \le r\cos^2\theta\sin\theta \le r.$$

Of course $\lim_{r\to 0} r = \lim_{r\to 0} -r = 0$, therefore, by the Squeeze Theorem, we have that

$$\lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0,$$

and this holds independently of θ. Hence the wanted limit is also 0: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Example 3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. We do the usual substitution and get

$$\lim_{r\to 0^+} r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + \sin\theta}.$$

In this case, the limit for $r \to 0^+$ clearly depends on θ. This leads us to suspect that the wanted limit of f does not exist. To check this, we take two different paths through $(0,0)$. If we consider the path $y = x^2$ we get

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

If we take another path, $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

We have obtained different values, therefore the initial limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ does not exist.

Good to know:

- If, after the substitution, all r simplify, and we are left with an expression in θ, then the limit does not exist.
- As a rule of thumb, if we are left with θ only in the denominator, we suspect that the limit does not exist (see Example 3).
- If θ only occurs in the numerator, then we can often use inequalities to show that the limit $r \to 0$ is independent of θ (as in Example 2) and so compute $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

E-mail address: masulli@qgm.au.dk

Date: September 15, 2011.

Polar Coordinates and Limits

9c

Consider

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

You try different paths (such as all lines through the origin, $y = mx$, a parabola or two, etc.) and you notice you keep getting 0. This leads you to believe the limit exists and is 0. So you decide to try polar coordinates: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, and take the limit as $r \to 0^+$. So for this one, you get

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^4(\theta)+r^4\sin^4(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0^+} r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)).\end{aligned}$$

You want to say this limit is 0, and it is. But remember that we want to be 0 independent of θ. Implicitly, what you're using is that

$$0 \le |r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))| \le r^2|\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)| \le r^2\cdot 2 = 2r^2.$$

Now as $r \to 0^+$, $2r^2 \to 0$, and so by squeeze theorem, $r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)) \to 0$ as well. So the limit is 0. The key is that the limit was of r^2 times something *bounded*.

9b

Here's another one for you:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Again, you try some different paths, like lines and such, and you keep getting 0. So you want to prove this limit is 0. Well, you go to polar coordinates and you get

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2(\theta)\sin(\theta).$$

We want to say this goes to 0. Can we do this? Yes, because we have r times something bounded. Indeed,

$$|\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \le 1$$

since each of $\cos^2(\theta)$ and $\sin(\theta)$ is bounded by 1. Therefore

$$|r\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \le |r| \to 0$$

as $r \to 0^+$. Therefore the whole limit is 0.

Now look at the limit we had today:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}.$$

and

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= r^3 \cos^3\theta + r^3 \sin^3\theta \\ &= r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \end{aligned}$$

Also, saying $(x, y) \to (0, 0)$ *is equivalent to saying* $r \to 0^+$. *Hence, we have:*

9d

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0^+} r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

There is also an equivalent of the squeeze theorem. Suppose we are trying to find $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ given $f(x, y)$ and we suspect the limit might be L.

Theorem 208 *Suppose that* $|f(x, y) - L| \leq g(x, y)$ *for every* (x, y) *inside a disk centered at* (a, b)*, except maybe at* (a, b). *If* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = 0$ *then* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.

The difficulty with this theorem is that we must suspect what the limit is going to be. This is not too much of a problem. If you have tried a table of values and found that along all the paths the table allows you to investigate, the limit is the same, or if you have tried to compute the limit along different paths and have found the same value every time. Then, you might suspect the limit exists and is the common value you have found. It is this value you would try in the squeeze theorem. The second difficulty is finding the function g. This is done using approximation of the initial function f. How it is done depends on f. We illustrate how to do it with a few examples.

Example 209 *Find* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *for* $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
The reader will check that computing this limit along various paths such as $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ *gives* 0. *So, you might start suspecting the limit exists and is* 0. *We now use the squeeze theorem to try to prove it. In other words, we need to find a function* $g(x, y)$ *such that* $|f(x, y) - 0| \leq g(x, y)$ *and* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$.