14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$

(397) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \underbrace{\frac{dt}{1+t}} = -\ln|1+t| + C = -\ln|1+\cos x| + C.$$

$f(t) = \frac{1}{1+t}$ $\quad t \neq -1$

• $\cos x \neq -1$ $\quad x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

• intervaly $(\alpha, \beta) = (-\pi, \pi) + 2k\pi$

• $\int f(t)$ máme na $(-1, \infty) = (a, b)$

• $\varphi = \cos x$ $\quad \varphi(-\pi, \pi) = (-1, 1]$

(393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}. \quad \longrightarrow \text{na } \mathbb{R}$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{\underbrace{1+2t^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C. \quad f$$

- $\int f$ je na $(-\infty, \infty) = (a, b)$
- $\varphi = \tan x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$

  (α, β)

  $\varphi(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$

- slepíme příště

na $\mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ $\qquad (\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že $\qquad \varphi(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

který dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2. Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$
$$3y + 1 = A(y+1) + B(y+3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$. Platí tedy, že

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}$$

Nyní dokončíme integraci $\qquad f(x)$ na $\mathbb{R} = (a, b)$

$$= \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \arctan t$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} - \arctan(\operatorname{tg} x)$$

lepení příště

4. $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte → na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$\int$ na $(-\infty, 2)$

(a, b)

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right) dt =$$

$$= 2t + \frac{t^2}{2} + 3\ln|t-2| + C = 2\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 3\ln|\sin x - 2| + C.$$

$(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ $\qquad \varphi = \sin x$

$\varphi(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset (a, b)$

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte $\longrightarrow$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$\int$ ne na $\mathbb{R} = (a, b)$

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}\ \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

$(\alpha, \beta) = (-\pi, \pi) + 2k\pi$

$\varphi(\alpha, \beta) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$

slepíme příště

(391) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

$x \neq 0 + k\pi$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int -\frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln|\cos x + 1| + C == \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\mathrm{tg}^2 \tfrac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\, \tfrac{x}{2}\right| + C.$$

$f(t)$ na $(-1,1) = (a,b)$

$\varphi = \cos x$

$(\alpha, \beta) = (0, \pi) + k\pi$

$\varphi(0,\pi) = (-1,1) \subset (a,b)$

Nelepíme (není kde)

$x \neq 0 + \frac{k\pi}{2}$

7. (!) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$

Řešení: Protože $f(\sin x, \cos x) = f(-\sin x, -\cos x)$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Protože

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+t^2}{t} \frac{1+t^2}{t^2}$$

$(a_1, b_1) = (0, \infty)$

a

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt,$$

$f(t), t \neq 0$

$(a_2, b_2) = (-\infty, 0)$

dostáváme

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\, dt \stackrel{C}{=} \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

Podotkněme, že platí

$$\frac{1}{2\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \stackrel{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

8. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

9. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

$(\alpha_1, \beta_1) = (0, \pi/2) + k\pi$

$(\alpha_2, \beta_2) = (-\frac{\pi}{2}, 0) + k\pi$

$\tan\,(0, \pi/2) + k\pi = (0, \infty) \subset (a_1, b_1)$

$\tan\,(-\pi/2, 0) + k\pi = (-\infty, 0) \subset (a_2, b_2)$

lepíme

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$\rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx.$$

$f(t)$, $t \neq 1$

<u>**Řešení:**</u>

$(a_1, b_1) = (1, \infty)$

$(a_2, b_2) = (-\infty, -1)$

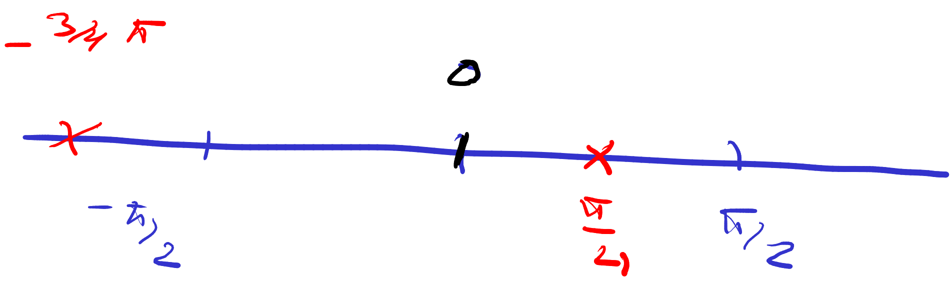
$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + \frac{x}{2} + C.$$



$(\alpha_1, \beta_1) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$

$(\alpha_2, \beta_2) = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

$\varphi(\alpha_1, \beta_1) = (-\infty, 1) \subset (a_2, b_2)$

$\varphi(\alpha_2, \beta_2) = (1, \infty) \subset (a_1, b_1)$

V bodech $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ slepíme přišlo

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte $\to$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{1 + 4t^2 + 3 - 3t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + 4 - 5}{t^2 + 4}\, dt = \int \left(1 - 5\frac{1}{t^2 + 4}\right) dt = t - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \cos x - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2} + C.$$

$f(t)$

na $\mathbb{R} = (a, b)$

$(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$

$\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

10. (!) $f(x) = \operatorname{tg}^5 x$ $\quad (\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$

Řešení: Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že

$$\mathrm{d}x = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak $\quad$ na $\mathbb{R} = (a, b)$

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \int \frac{t^5}{t^2+1} \, dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$
$$= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

Nelepíme

11. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$ $\quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{2}$

Řešení: Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pak platí, že

$$dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

a dále platí

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$t \neq -1$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{t^2+1} \, dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)} \, dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} \, dt =$$

$(a_2, b_2) = (-1, \infty)$

a nyní postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$(a_1, b_1) = (-\infty, -1)$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t = -1$ dostaneme, že $B = -2$. Dosazením $t = i$ dostaneme

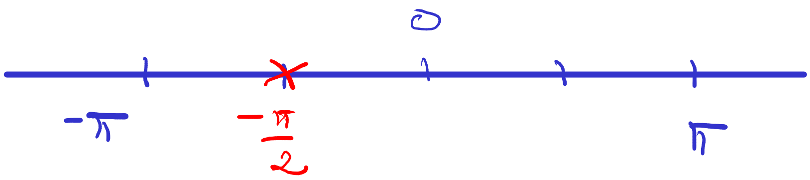
$$4i = (Ci + D)(1+i)^2 = (Ci + D) \cdot 2i$$

$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C = 0$ a $D = 2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

$(\alpha_1, \beta_1) = (-\pi, -\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$



$(\alpha_2, \beta_2) = (-\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$

$\tan\frac{x}{2}$: $(\alpha_1, \beta_1) \to (-\infty, -1) \subset (a_1, b_1)$

$(\alpha_2, \beta_2) \to (-1, \infty) \subset (a_2, b_2)$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A - 2 + 2$, tedy, že $A = 0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\, dt + \int \frac{2}{t^2+1}\, dt \stackrel{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\arctan t = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\arctan\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

12. $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$

V $\pi + 2k\pi$ slepíme příště

• (10) $y = \tan x$ • (7) $y = \tan x$

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte → na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$f(t)$ na $\mathbb{R}$

$= (a,b)$

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array}\right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

$(\alpha, \beta) = (-\pi, \pi) + 2k\pi$

$\varphi(-\pi, \pi) = \mathbb{R} = (a,b)$

$+2k\pi$

V $\pi + 2k\pi$ slepíme příště.