4. cvičení

`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php`
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 2 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$
Potom platí, že
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Věta 4. Nechť a_n je **kladná** posloupnost. Nechť navíc existuje
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$
Pak existuje i
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Fakta

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Poznámky 5. Algoritmus:

1. Zkontrolujeme, že má řada nezáporné členy. Jinak vyšetřujeme absolutní konvergenci.
2. Vybereme si d'Alambertovo nebo Cauchyovo kritérium a spočteme příslušnou limitu.
   (a) Obvykle nezáleží, které kritérium zvolíme. Výjimkou je situace, kdy řada obsahuje nulové členy - pak musíme zvolit Cauchyho. Druhou výjimkou je případ, $\limsup > 1$, který se vyskytuje pouze u Cauchyho.
   (b) Může se stát, že limita neexistuje, pak zkusíme variantu s $\limsup$ nebo s nalezením q.
3. Podle limity (< 1 nebo > 1) uděláme závěr: Konverguje nebo Diverguje.
4. Varování: Pokud limita vyjde rovna 1, nevíme nic. Navíc pokud vyšla 1 v odmocninovém kritériu, vyjde 1 i v podílovém a naopak. Bude pak potřeba zvolit nějaké úplně jiné (nejspíš nutnou podmínku nebo (limitní) srovnávací).

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^k}{7}\right)^k$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k + 3^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

(g) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$

(l) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Vyšetřete konvergenci $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

- (1g) $\left|\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right| \leq \frac{2}{3}$.
- (1l) Věta 4.