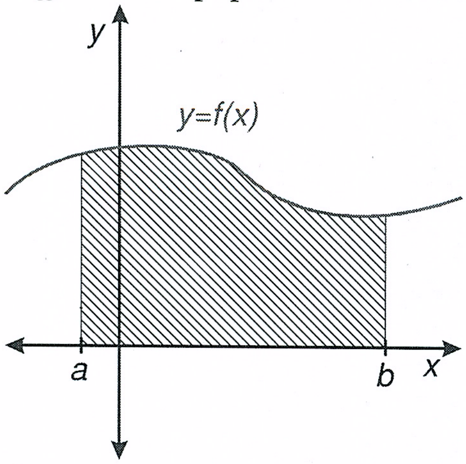
10.3.13 Výpočet plochy obrazce I

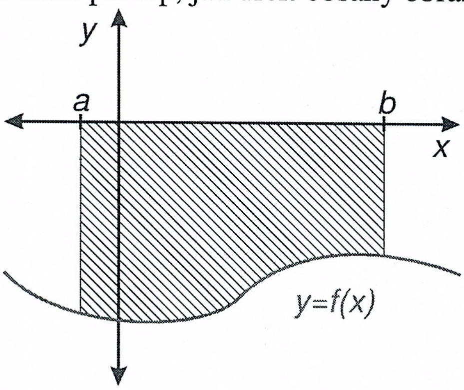
Předpoklady: 10311

Nejjednodušší případ už známe z hodiny, ve které jsme odvozovali určitý integrál:

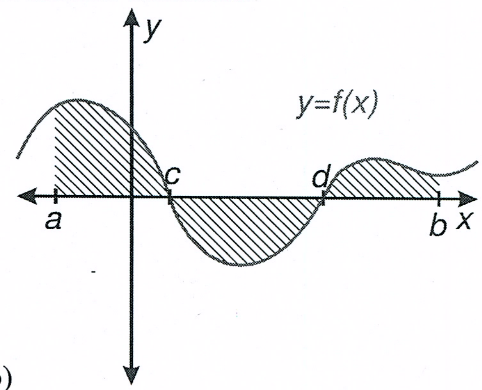


Útvar $U(a,b,f)$ = plocha vymezená přímkami $y=0$ (osa x), $x=a$, $x=b$ a grafem spojité, nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle \Rightarrow S(U)=\int_a^b f(x)$.

Př. 1: Navrhni postup, jak určit obsahy obrazců na dalších obrázcích:



a)



b)

a) Na levém obrázku je nakreslena funkce, která je v intervalu $\langle a;b\rangle$ záporná $\Rightarrow$ záporný vyjde i určitý integrál $\Rightarrow$ musíme znaménko změnit na kladné: $S(U)=-\int_a^b f(x)\,dx$

b) Na pravém obrázku je funkce, která několikrát mění své znaménko $\Rightarrow$ jednotlivé části plochy by se od sebe odečítaly $\Rightarrow$ musíme výpočet rozdělit do intervalů, ve kterých má funkce stále stejné znaménko a podle potřeby před integrály přidat mínus, aby všechny části vycházely kladně: $S(U)=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ **při výpočtu plochy musíme mít představu o znaménkách hodnot funkce.**

Př. 2: Vypočti obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:

10

a) $y=3-x, y=0, x=-3, x=2$

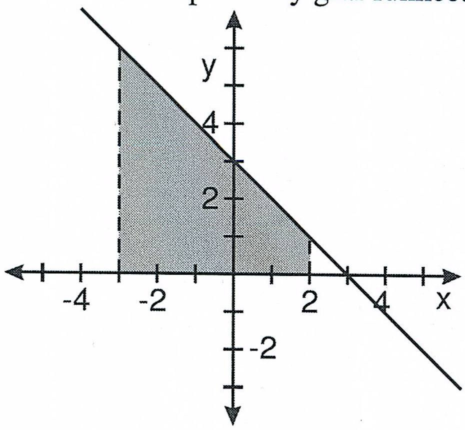
b) $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$

c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

1a

a) $y = 3 - x, y = 0, x = -3, x = 2$

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



$\Rightarrow$ spočteme klasický určitý integrál $S(U) = \int_a^b f(x)\,dx$

$$S(U) = \int_{-3}^{2} (3-x)\,dx = [3x]_{-3}^{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} = [3\cdot 2 - 3(-3)] - \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right] = 15 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{2}$$

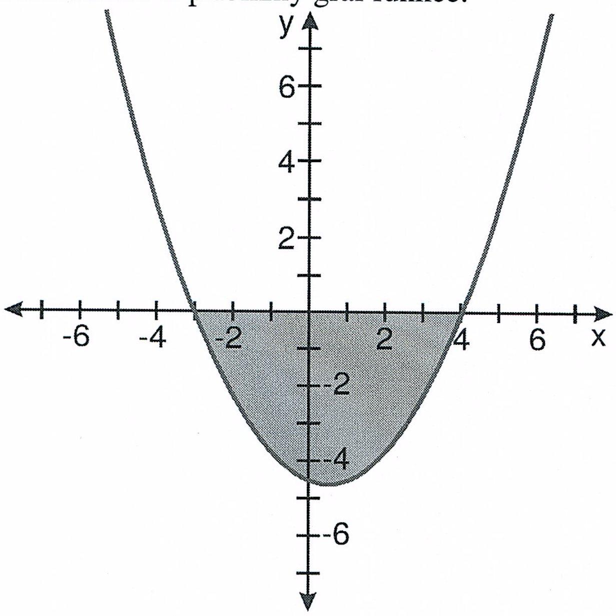
1b

b) $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$

Najdeme průsečíky s osou x: $y = x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



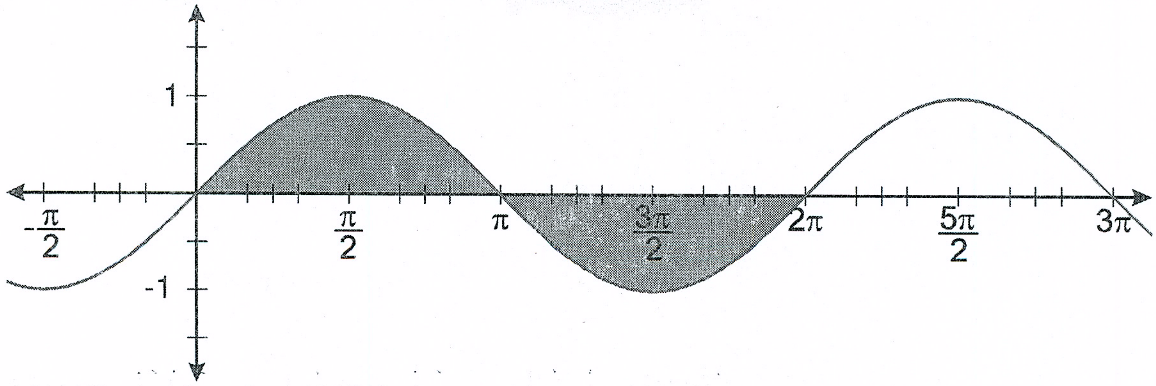
$\Rightarrow$ spočteme určitý integrál se záporným znaménkem: $S(U) = -\int_a^b f(x)\,dx$

$$= -\left[\frac{4^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right] + \left[\frac{4^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right] + \left[12\cdot 4 - 12\cdot(-3)\right] = -\left(\frac{64}{3}+9\right) + \left(8-\frac{9}{2}\right) + 84 = \frac{343}{6}$$

1c

c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

Nakreslíme graf funkce:



Útvar se skládá ze dvou stejných částí $\Rightarrow$ určíme obsah jedné poloviny a vynásobíme ho dvěma.

$S(U) = 2\int_0^{\pi} \sin dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = -2[\cos\pi - \cos 0] = -2(-1-1) = 4$

Poznámka: Graf funkce v bodě b) je ve skutečnosti podstatně štíhlejší, v naší situaci je jeho tvar ale zcela nepodstatný, záleží pouze na tom, která jeho část se nachází pod osou.

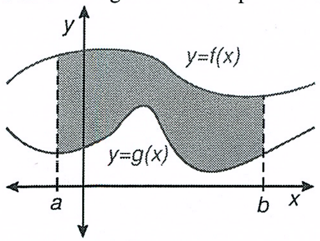
Př. 3: Petáková:
strana 165/cvičení 100 c) e)
strana 166/cvičení 101 b)

Shrnutí: Při výpočtu ploch je často nutné obrazec rozdělit na části.

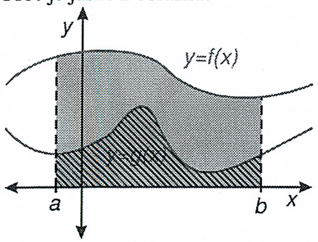
10.3.14 Výpočet plochy obrazce II

Předpoklady: 10313

Pomocí integrálů můžeme počítat i obsahy ploch, které nejsou vůbec ohraničovány osou *x*.

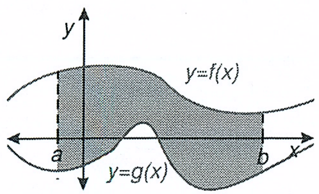


Obsah červené plochy na obrázku určíme pomocí integrálu takto:
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.
Proč je jasné z obrázku:

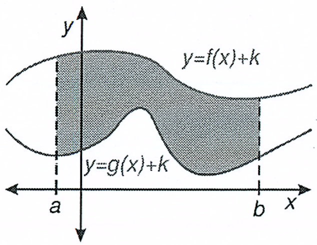


- Modrá plocha $S = \int_a^b f(x)\,dx$
- Šrafovaná plocha $S = \int_a^b g(x)\,dx$

Vzorec platí i v případě, že alespoň jedna z funkcí nabývá záporných hodnot, protože přičtením vhodné konstanty k oběma funkcím se plocha mezi křivkami nezmění, pouze se obrázek posune dostatečně nahoru



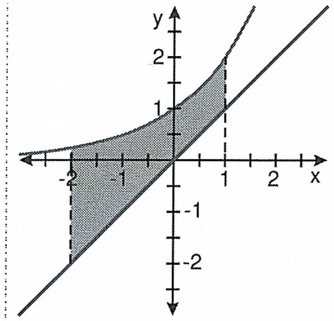
$\Rightarrow$



Př. 1: Urči obsah rovinného obrazce, který ohraničují křivky $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.

Nakreslíme si přibližné tvary grafů obou funkcí:

1d

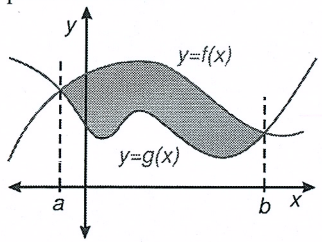


Obsah plochy:

$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} (2^x - x)\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{\ln 2}(2^1 - 2^{-2}) - \frac{1}{2}\left[1^2 - (-2)^2\right] =$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}(-3) = \frac{7}{4\ln 2} + \frac{3}{2}$

V mnoha případech se v zadání přímo neudávají meze, protože ohraničenou plochu omezuje přímo tvar křivek:

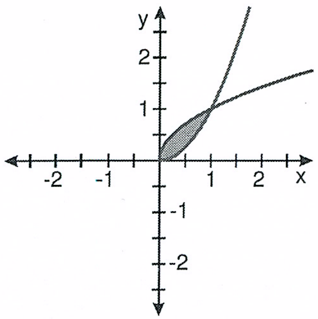


1e

Př. 2: Urči obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:
a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ b) $y = x^2 - 3$, $y = 2x$

a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$
Obě funkce procházejí body $[0;0]$ a $[1;1]$.

1e



$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1^3}-\sqrt{0^3}\right)-\frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

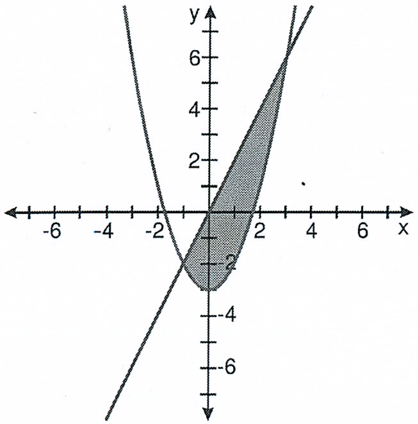
b) $y=x^2-3$, $y=2x$

Nejdříve určíme meze integrálu, tedy společné body grafů obou funkcí:

$x^2-3=2x$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3$

$\Rightarrow$ oba grafy se protínají v bodech $[-1;-2]$ a $[3;6]$



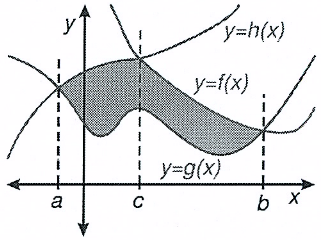
$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^3\left[2x-(x^2-3)\right]dx=\int_{-1}^3(2x-x^2+3)dx=$$

$$=\left[2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^3-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3+[3x]_{-1}^3=\left[3^2-(-1)^2\right]-\left[\frac{3^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+\left[3\cdot3-3(-1)\right]=$$

$$=(9-1)-\left(9+\frac{1}{3}\right)+(9+3)=\frac{32}{3}$$

Pokud je útvar ohraničen větším počtem křivek rozdělíme počítání integrálu na více částí podobně jako v minulé hodině, když křivka protínala osu x a části obrazce se vyskytovali střídavě nad i pod osou x.

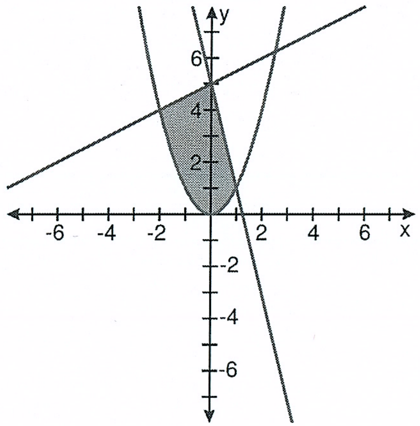
Př. 3: Zapiš obecný vztah pro výpočet plochy vyznačené na obrázku ohraničené funkcemi $y=f(x)$, $y=g(x)$ a $y=h(x)$.



$$S=\int_a^c[h(x)-g(x)]dx+\int_c^b[f(x)-g(x)]dx$$

Př. 4: Vypočti obsah útvaru, který je zespodu ohraničen křivkou $y=x^2$ a seshora přímkami funkcí $y=0,5x+5$ a $y=-4x+5$.

Nakreslíme si obrázek situace:



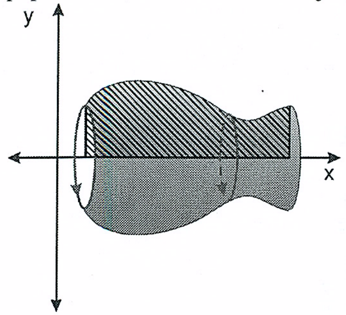
Hledáme průsečíky:

10.3.15 Výpočet objemu rotačních těles

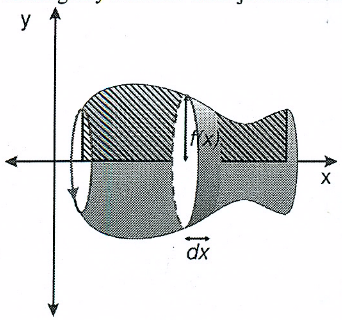
Předpoklady: 10313

Vzorec pro objem rotačního tělesa si odvodíme způsobem, který sice není nenapadnutelný, ale na druhé straně poměrně přesně odpovídá tomu, co se provozuje v technické praxi.

rotační těleso vznikne rotací rovinného útvaru (na obrázku šrafovaně) kolem osy (v našem případě osa x, na které zároveň leží jedna ze stran útvaru).



Při výpočtech povrchů jsme využívali fakt, že integrování umožňuje sečíst nekonečně mnoho nekonečně tenkých obdélníčků.
Analogicky můžeme nakrájet na nekonečně tenké plátky (jako salám) naše rotační těleso.



Sečtením těchto plátků integrací získáme celý objem $V(T)=\int_a^b dV$.

Jaký je objem jednoho kolečka?
Jde o válec (pokud je dx nekonečně malé, funkce nestihne změnit svou hodnotu), kde $r=f(x)$, $v=dx \Rightarrow$

objem válce $V=\pi r^2 v \Rightarrow dV=\pi f^2(x)\,dx$

$$V(T)=\int_a^b dV=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

1ř

Př. 1: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y=2$, $x=0$, $x=4$ kolem osy x. Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^4 2^2\,dx=\pi\int_0^4 4\,dx=\pi[4x]_0^4=\pi(4\cdot4-0)=16\pi$$

Tělesem, které vznikne rotací obdélníku kolem osy x je válec s těmito parametry: $r=2$, $v=4$
Objem válce: $V=\pi r^2 v=\pi\cdot2^2\cdot4=16\pi$

1g

Př. 2: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y=3-0,5x$, $x=0$, $x=4$ kolem osy x. Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^4\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2 dx=\pi\int_0^4\left(9-3x+\frac{1}{4}x^2\right)dx=\pi\left[9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3\cdot4}\right]_0^4=$$

$$=\pi\left[\left(9\cdot4-\frac{3}{2}4^2+\frac{4^3}{3\cdot4}\right)-\left(9\cdot0-\frac{3}{2}\cdot0^2+\frac{0^3}{3\cdot4}\right)\right]=\pi\left(36-24+\frac{16}{3}\right)=\frac{52\pi}{3}$$

Tělesem, které vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem osy x je komolý rotační kužel s těmito parametry: $r_1=3$, $r_2=3-0,5\cdot4=1$, $v=4$
Objem komolého rotačního kužele:

$$V=\frac{\pi v}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)=\frac{\pi\cdot4}{3}\left(3^2+3\cdot1+1^2\right)=\frac{\pi\cdot4\cdot13}{3}=\frac{52\pi}{3}$$

Př. 3: Odvoď vzorec pro objem koule o poloměru r.

Nejdříve musíme najít funkci, která bude ohraničovat útvar jehož rotací vznikne koule:
Rovnice kružnice o poloměru r se středem v počátku: $x^2+y^2=r^2$
Vyjádříme y (předpis funkce): $y=\sqrt{r^2-x^2}$
Integrujeme v mezích od 0 do r:

$$V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[xr^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\pi\left(r\cdot r^2-\frac{r^3}{3}\right)$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi r^3$$

$\Rightarrow$ objem celé koule je dvojnásobný $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

Př. 4: Odvoď vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou v.

Nakreslíme si obrázek:

2a

(441) Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.

Řešení:

Dosazením do vzorce dostaneme

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x^2 + 1 \\ 2t\,dt = 2x\,dx \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2 \\ \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-1}\, t\, dt = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = \int_2^4 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\, dt = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|\right]_2^4 =$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 - 2 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$$

26

(450) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 4+x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.

Řešení:

$$Q_x = 2\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\sqrt{1+1}\, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\ dx =$$

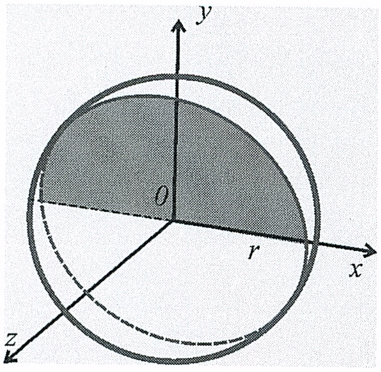
$$= 2\sqrt{2}\pi \left[4x + \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = 2\sqrt{2}\pi \left(8 + \frac{4}{2}16 - \frac{16}{2}\right) = 36\sqrt{2}\pi.$$

Příklad 3.3.2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru $r > 0$.

2c

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule.



Obr. 3.3.4. Objem koule

Pro její objem bude platit

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Poznámka

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že funkce $(r^2 - x^2)$ je sudá. Podle věty 2.4.2 bude integrál s mezemi $< -r, r >$ roven dvojnásobku integrálu s mezemi $< 0, r >$. Je to logické, neboť objem celé koule se rovná dvojnásobku objemu polokoule.

Pro výpočet objemu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r \cos t$,

$y = r \sin t$, $t \in < 0, \pi >$ (viz příklad 3.2.2).

Jelikož $\varphi'(t) = (r \cos t)' = -r \sin t$, dostaneme po dosazení do vztahu z věty 3.3.2

$$V = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \, r \sin t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \cos t = u \\ -\sin t \, dt = du \\ 0 \mapsto 1, \ \pi \mapsto -1 \end{array} \right| =$$

Věta 3.3.2.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$, přičemž funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na intervalu $<\alpha, \beta>$ a funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $<\alpha, \beta>$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti

$\varphi(\alpha) \le x \le \varphi(\beta)$,

$0 \le y \le \psi(t)$,

kolem osy x, platí $V = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right| dt$.

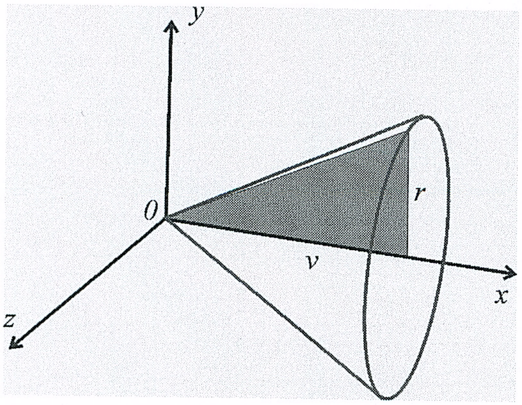
Řešené úlohy

20

Příklad 3.3.1. Ověřte vzorec pro výpočet objemu kuželu s poloměrem podstavy r a výškou v.

Řešení:

Vrchol kuželu umístíme do počátku souřadné soustavy tak, aby osa kužele splývala s osou x. Plášť kužele vznikne rotací přímky $y = \dfrac{r}{v}x$ kolem osy x pro $x \in <0, v>$ (obr. 3.3.3).



Obr. 3.3.3. Objem kužele

Dosazením do vztahu z věty 3.3.1 dostaneme

$$V = \pi \int\limits_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int\limits_0^v x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

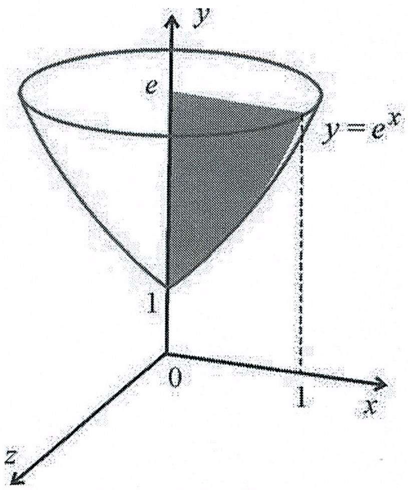
což je vztah, který znáte z geometrie.

2e

Příklad 3.3.6. Vypočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in <0,1>$ kolem osy y.

Řešení:

Funkce $y = e^x$ je prostá na definičním oboru a inverzní funkce k ní bude $x = \ln y$, $y > 0$. Pro $x \in <0,1>$ bude $y \in <1,e>$ (obr. 3.3.11).



Obr. 3.3.11. Rotace křivky $y = e^x$ kolem osy y

Objem rotačního tělesa bude:

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 y \, dy = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \ln^2 y \\ u = y & v' = (2\ln y)\dfrac{1}{y} \end{matrix} \right| = \pi \left(\left[y \ln^2 y \right]_1^e - 2\int_1^e \ln y \, dy \right) =$$

$$= \pi \left([e - 0] - 2\int_1^e \ln y \, dy \right) = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \ln y \\ u = y & v' = \dfrac{1}{y} \end{matrix} \right| = \pi \left(e - 2[y \ln y]_1^e + 2\int_1^e 1 \, dy \right) =$$

$$= \pi \left(e - 2e + 2[y]_1^e \right) = \pi(e - 2e + 2e - 2) = \pi(e-2).$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x.
2. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa při rotaci kolem osy x, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi.

Důkaz: Funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$, pak platí

$dx=\varphi'(t)dt$ a $dy=\psi'(t)dt$. Dosazením do vztahu

$$s=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)dt]^2+[\psi'(t)dt]^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\;dt$$

dostaneme tvrzení věty.

Poznámka

Libovolnou funkci $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ můžeme snadnou parametrizovat, když položíme $x=t$, $y=f(t)$, $t\in<a,b>$. Jelikož $\varphi'(t)=1$, vidíme, že tvrzení věty 3.2.1 je speciálním případem věty 3.2.2.

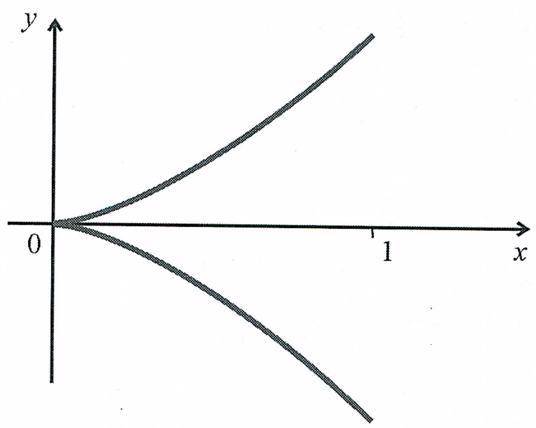
Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Vypočtěte délku semikubické (Neilovy) paraboly $y^2=x^3$ na intervalu $<0,1>$.

3a

Řešení:

Křivka se skládá ze dvou částí $y=x^{\frac{3}{2}}$ a $y=-x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podle osy x (obr.3.2.2).



Obr. 3.2.2. Graf semikubické paraboly $y^2=x^3$ pro $x\in<0,1>$

Délka bude rovna dvojnásobku délky části nad osou x. Použijeme vztah z věty 3.2.1, kde

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

(3a)

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = 2\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{16}{27}\left[\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right].$$

Poznámka

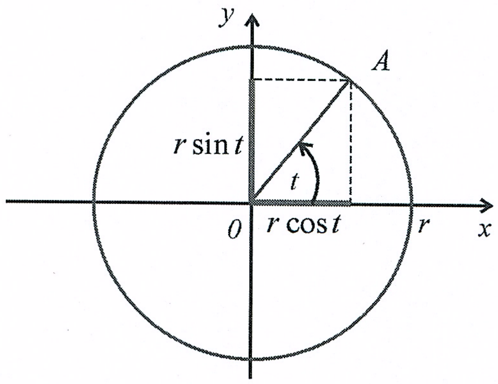
Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto se nám i pro jednoduché funkce stane, že neumíme příslušný integrál vypočítat. V takovém případě bude nutno použít nějakou numerickou metodu nebo některý matematický program (např. Derive, Maple, Mathematica).

Příklad 3.2.2. Vypočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Bez újmy na obecnosti uvažujme kružnici se středem v počátku. Rovnice této kružnice je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Vezmeme rovnici horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ a vypočítáme její derivaci $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Problém je v tom, že derivace není definována pro $x = r$ a $x = -r$. Předpoklady věty 3.2.1 nejsou tedy splněny.

Snadno najdeme parametrické rovnice kružnice. Z definice funkcí sinus a kosinus určíme polohu libovolného bodu $A = (x, y)$ ležícího na kružnici (obr. 3.2.3).



Obr. 3.2.3. Odvození parametrických rovnic kružnice

Hledané parametrické rovnice kružnice budou:

$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\quad t \in < 0, 2\pi >.$

Měníme-li úhel t od nuly do 2π, oběhne bod A celou kružnici. Pro výpočet délky kružnice použijeme větu 3.2.2.

Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$ a $\psi'(t) = (r\sin t)' = r\cos t$, dostáváme

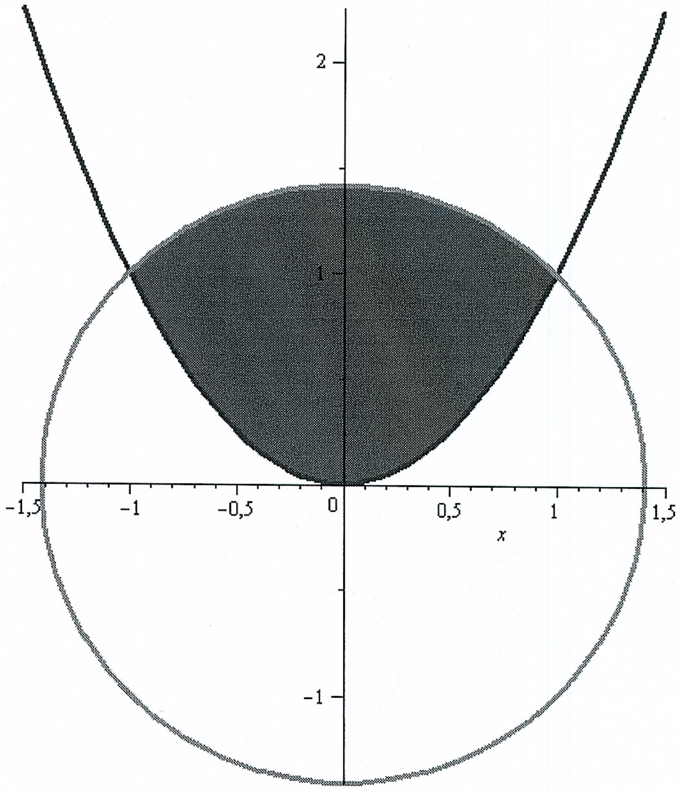
(437) Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.

36

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj.

$$y + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2 \text{ a } y_2 = 1.$$



Vzhledem k podmínce $y = x^2$ je pro nás zajímavá pouze hodnota y_2. Potom $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Navíc, na intervalu $[-1, 1]$ platí $\sqrt{2 - x^2} > x^2$, proto hledaný obsah dostaneme pomocí integrálu

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - x^2\right) dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - 0\right) = \underline{\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}}.$$

Při výpočtu jsme využili následující integrál

$$\int \sqrt{2 - x^2}\, dx \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \frac{dx}{\sqrt{2}} = \cos t\, dt \end{array} \right| = \int \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\, \sqrt{2} \cos t\, dt =$$
$$= \sqrt{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \sqrt{2} \cos t\, dt = 2 \int \cos^2 t\, dt \;\left|\, \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \,\right| =$$
$$= 2 \int \left(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\right) dt = \int (\cos 2t + 1)\, dt = \frac{1}{2}\sin 2t + t + C =$$
$$= \sin t \cos t + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(440) Odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a a b.

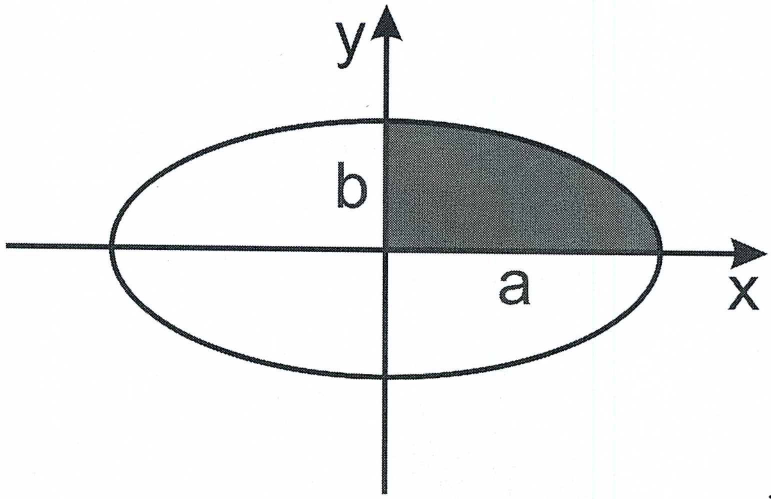
3c

Řešení:

Obecná rovnice zadané elipsy je tvaru

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tato rovnice zadává implicitně funkci horní a dolní půlelipsy. Příklad vyřešíme tak, že si z rovnice elipsy explicitně vyjádříme funkci horní půlelipsy a pomocí ní pak spočítáme obsah čtvrtiny elipsy, která se nachází v I. kvadrantu.



Horní půlelipsa je dána funkcí

$$f: y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Interval, na kterém tato funkce zadává čtvrtelipsu v I. kvadrantu je $x \in [0, a]$. Můžeme tedy počítat

$$\frac{S}{4} = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ a \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 0 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Vzorec pro obsah elipsy s poloosami a a b je tedy

$$S = \pi ab.$$

(443) Určete délku oblouku řetězovky $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, $I = [-1, 1]$.

Řešení:

Připomeňme, že platí

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 \tfrac{x}{a}}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2 \tfrac{x}{a}}\, dx \;\Big|\, \cosh \text{ je všude kladný} \,\Big| =$$
$$= \int_{-1}^{1} \cosh \tfrac{x}{a}\, dx = \left[a \sinh \tfrac{x}{a}\right]_{-1}^{1} = a\left(\sinh \tfrac{1}{a} - \sinh \tfrac{-1}{a}\right) =$$
$$= a(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}).$$

1.2 Kritéria pro konvergenci číselných řady

Příklad 1.4: Pomocí integrálního kritéria vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Řešení: Pro $k \leq 0$ řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \neq 0$). Vyšetříme nyní konvergenci pro $k > 0$. Na intervalu $\langle 1, \infty)$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^k}$ spojitá, klesající a kladná. Pro n-tý člen dané řady platí $a_n = f(n) = \frac{1}{n^k}$. Můžeme použít integrální kritérium. Pro $k > 1$ platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^{-k}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^\infty = 0\,.$$

Pro $0 < k < 1$ platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^\infty = \infty\,.$$

Pro $k = 1$ platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_0^\infty = \infty\,.$$

Daná řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.

Příklad 1.5: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\,.$$

Řešení: Použijeme-li pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ substituci $m = n + 2$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} - 1 - \frac{1}{2} = \infty - \frac{3}{2} = \infty\,.$$

Podle příkladu 1.4 řada $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ diverguje, diverguje proto i daná řada.

Příklad 1.6: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá klesající a kladná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Použijeme integrální kritérium.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; [\operatorname{arctg} x]_1^{\infty} \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{4} < \infty\,.$$

Integrál konverguje, konverguje tedy i daná řada.

Příklad 1.10: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá klesající a kladná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Použijeme integrální kritérium.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[2\sqrt{x+1}\right]_1^{\infty} \;=\; 2\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2}\right) \;=\; \infty\,.$$

Integrál diverguje, diverguje tedy i daná řada.

Příklad 1.11: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Řešení: Označme $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Platí $0 < a_{n+1} < a_n$ pro $n \geq 1$ a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Podle Leibnitzova kritéria řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje. Vyšetřeme ještě absolutní konvergenci, t.j. zda konverguje řada absolutních hodnot $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tato řada podle příkladu 1.4 diverguje.

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje tedy neabsolutně.

Příklad 1.12: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2\,n+1}\right)^n\,.$$

Řešení: Použijeme odmocninové (Cauchyovo) kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2\,n+1} \;=\; \frac{1}{2} \;<\; 1\,.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2\,n+1}\right)^n$ tedy konverguje.

Řešení. Pro vyšetření konvergence dané řady užijeme integrální kritérium. Označme $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^p x}$ pro každé $x \geq 2$. Funkce f je na intervalu $\langle 2, \infty \rangle$ kladná a klesající. Platí

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^p x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^p x} \, \mathrm{d}x.$$

Při výpočtu primitivní funkce použijeme substituční metodu:

$$\begin{aligned} z &= \ln x \\ \mathrm{d}z &= \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dosadíme do předchozího integrálu, v případě $p \neq 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^p x} \, \mathrm{d}x &= \lim_{b \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{z^p} \, \mathrm{d}z = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\ln 2}^{\ln b} = \\ &= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{\ln^{-p+1} x}{-p+1} \right]_2^b = \lim_{b \to \infty} \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} - \frac{\ln^{1-p} 2}{1-p}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$\begin{aligned} &\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^p x} \, \mathrm{d}x = \infty \qquad \text{je-li} \quad 0 \leq p < 1 \\ &\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^p x} \, \mathrm{d}x = \frac{\ln^{1-p} 2}{p-1} < \infty \qquad \text{je-li} \quad p > 1. \end{aligned}$$

V případě $p = 1$ platí

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \ln \ln x - \ln \ln 2 = \infty.$$

Daná řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ tedy konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $0 \leq p \leq 1$ (stejně jako v případě $p < 0$, kdy namísto integrálního kritéria stačí užít srovnávací kritérium a porovnat zadanou řadu s divergentní harmonickou řadou).

Příklad 2.24. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

Řešení. Kdyby zadaná řada konvergovala, musela by splňovat nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 0, \quad \text{a tedy i} \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0.$$

Nyní spočítáme nevlastní integrál: $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right]_2^t =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{2 \ln^2 2} - \frac{1}{2 \ln^2 t} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2} - 0 = \frac{1}{2 \ln^2 2}$$

Vidíme, že $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ je konečný, takže dle integrálního kritéria je vyšetřovaná řada $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot \ln^3 k}$ konvergentní.

Příklad 36: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}.$$

Protože $\arctan n$ je kladný pro všechna $n > 0$, a výraz $1 + n^2$ je též kladný, jde o řadu s kladnými členy. Budeme-li chtít vyšetřit konvergenci nebo divergenci této řady pomocí integrálního kritéria, musíme ověřit jeho podmínky pro funkci $f : f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$.

1. $$\lim_{x \to \infty} \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \arctan^3 x}{\lim\limits_{x \to \infty} (1+x^2)} = 0$$

2. Pro vyšetření monotonie najdeme první derivaci funkce f.

$$f'(x) = \left(\frac{\arctan^3 x}{1+x^2} \right)' = \frac{\frac{3 \arctan^2 x}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - 2x \cdot \arctan^3 x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{3 \arctan^2 x - 2x \cdot \arctan^3 x}{(1+x^2)^2} = \frac{\arctan^2 x}{(1+x^2)^2} \cdot (3 - 2x \cdot \arctan x)$$

Aby funkce f byla nerostoucí na intervalu $\langle 1; \infty)$, musela by na tomto intervalu být $f'(x) \leq 0$. Vidíme, že tomu tak ale není. Znaménko první derivace určuje výraz $(3 - 2x \cdot \arctan x)$, neboť ostatní výrazy, které obsahuje předpis pro derivaci, jsou již kladné pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$. Pro $x = 1$ je však výraz $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ kladný, což je ve sporu s naším požadavkem. Protože jsou však funkce $2x$ a $\arctan x$ rostoucí na R a kladné na $(0; \infty)$, je funkce $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ klesající. Pro $x = 2$ je již výraz $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ záporný, protože

$$2 \cdot 2 \cdot \arctan 2 > 4 \cdot \arctan 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi > 3.$$

Protože je funkce $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ klesající, budou její hodnoty záporné pro všechna $x > 2$. To znamená, že i první derivace f' bude záporná a my na základě této skutečnosti můžeme tvrdit, že funkce $f : f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ je klesající na intervalu $\langle 2; \infty)$.

Pokud bude existovat integrál $\int_2^\infty f(x)dx$, bude řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}$ konvergentní. Nebude nám vadit, jestliže vyšetříme konvergenci řady jen od jistého n_0 počínaje, protože konvergence řady nezávisí na změně nebo vynechání konečného počtu členů.

Nyní, když jsme ověřili podmínky kritéria, můžeme vypočítat integrál

$$\int_2^\infty \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx.$$

Primitivní funkci k funkci f najdeme opět substituční metodou.

$$\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx \rightarrow \left| \begin{array}{c} \arctan x = y \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dy \end{array} \right| \rightarrow \int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$$

Pokud se vrátíme k substituci, dostaneme:

$$\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx = \frac{\arctan^4 x}{4}.$$

Hledaný nevlastní integrál tedy bude:

$$\int_2^\infty \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{\arctan^4 x}{4} \right]_2^t = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \left(\arctan^4 t - \arctan^4 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \frac{\arctan^4 2}{4}$$

Protože integrál je konečný, bude vyšetřovaná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}$ konvergentní dle integrálního kritéria.

V předchozích příkladech jsme užívali integrálního kritéria k důkazu konvergence či divergence nekonečné číselné řady. Ukažme si ještě jedno použití integrálního kritéria. Protože tvrzení má tvar ekvivalence, můžeme jej využít také k důkazu existence nevlastního integrálu. Pokud totiž ukážeme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, bude existovat i integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Je to výhodné v případech, kdy potřebujeme zjistit, zda je daný nevlastní integrál konečný a nepotřebujeme znát jeho hodnotu.

Příklad 37: Rozhodněte, zda existuje integrál

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Rozhodovat o existenci tohoto integrálu jeho výpočtem je v tomto případě komplikované, zkusme proto užít integrálního kritéria. Snadno se ověří, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = 0$ a funkce $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ je klesající na intervalu $\langle 1; \infty)$. Proto stačí ukázat konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}}$. Užijme srovnávacího a integrálního kritéria (věty 3.3). Dostaneme:

$$\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}} \leq \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}.$$

Protože $\frac{5}{3} > 1$ je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ konvergentní dle věty 3.3 a dle srovnávacího kritéria je konvergentní i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}}$, takže dle integrálního kritéria je konečný i integrál $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Příklad 38: Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení: Daná řada je alternující, proto ověříme předpoklady Leibnizova kritéria. Platí

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$$

(členy řady konvergují k nule) a dále

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

(absolutní hodnoty členů řady tvoří klesající posloupnost). Podle Leibnizova kritéria tedy uvedená řada konverguje. Posoudíme absolutní konvergenci, tj. konvergenci řady absolutních hodnot

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^{k+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

To je však podle příkladu 1.3 divergentní řada, a proto je konvergence původní řady pouze neabsolutní (relativní).

Částečně řešené příklady:

1.15. Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^2}{(2k)!}$.

Řešení: Užijeme limitní podílové kritérium. Nejprve upravíme výraz a_{k+1}/a_k jako

$$\frac{[(k+1)!]^2}{[2(k+1)]!} \cdot \frac{(2k)!}{(k\,!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{2(2k+1)};$$

odtud $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = \frac{1}{4}$, a řada tedy konverguje.

1.16. Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{\mathrm{e}^k}$.

Řešení: Pomocí limitního odmocninového kritéria máme

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

řada tedy konverguje.

1.17. Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Řešení: Na základě integrálního kritéria posuzujeme konvergenci nevlastního integrálu $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Substitucí $t = \ln x$ jej převedeme na $\int\limits_0^{\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Konvergenci tohoto integrálu lze považovat za samozřejmou; můžeme ji ověřit např. přímým výpočtem metodou per partes. Řada proto konverguje (např. podle integrálního kritéria).

1.18*. Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$.

Řešení: Nabízí se srovnání s divergentní harmonickou řadou. Provedeme proto odhad $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ pro všechna $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$ (nakreslete si obrázek). Protože $1/k \in \langle 0, \pi/2\rangle$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$, máme $\sin\frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$. Divergence dané řady tedy plyne ze srovnávacího kritéria.

1.19. Příklad. Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln k}$.