15. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

   Řešení:
   http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html
   346

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. Lepení primitivních funkcí. Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení“* primitivních funkcí.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \leq 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int 1\, dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení:

Platí, že $\sqrt{x^6} = |x^3|$. Na intervalu $x \in (0, +\infty)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int (-x^3)\, dx = -\frac{x^4}{4} + C_2$$

Primitivní funkce ovšem existuje na celém $\mathbb{R}$, pokud se obě funkce shodují v bodě 0, tedy pokud $C_1 = C_2$ (princip lepení). Primitivní funkce jsou tedy určeny vztahy

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + C & x < 0 \\ C & x = 0 \\ \frac{x^4}{4} + C & x > 0 \end{cases}$$

kde C značí všude stejnou konstantu, avšak libovolně volenou.

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

$$\int e^{-|x|}\,dx$$

$x \in (0, \infty)$

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c_1$$

$x \in (-\infty, 0)$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c_2$$

$$\lim_{x \to 0-} e^{x} + c_2 = 1 + c_2$$

$$\lim_{x \to 0+} -e^{-x} + c_1 = -\frac{1}{e} + c_1$$

chceme $\quad 1 + c_2 = -\frac{1}{e} + c_1$

$$c_2 = -\frac{1}{e} - 1 + c_1$$

pak

$$F(x) = \begin{cases} e^{x} - \frac{1}{e} - 1 + c_1 & x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{e} + c_1 & \\ -e^{-x} + c_1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

(e) $f(x) = |\sin x|$

Řešení:

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, má také na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

Nejprve určíme neurčitý integrál k f na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Protože

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\sin x & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

platí, že libovolná primitivní funkce k funkci f na $\mathbb{R}$ má tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \cos x + B_k & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. V bodech $2k\pi$ je potřeba zajistit, aby funkce F byla spojitá, a tudíž limita zleva byla rovna limitě zprava. Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned} -\cos x + A_k = \cos x + B_{k-1} \qquad &\text{pro } x = 2k\pi \implies -1 + A_k = 1 + B_{k-1} \\ &\implies A_k = 2 + B_{k-1} \\ -\cos x + A_k = \cos x + B_k \qquad &\text{pro } x = \pi + 2k\pi \implies 1 + A_k = -1 + B_k \\ &\implies B_k = A_k + 2 = 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že funkce F je jednoznačně určena volbou kterékoliv konstanty A_k nebo B_k pro jedno libovolně volené celé číslo k.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení:

Zadaná funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$, tedy primitivní funkci budeme hledat také na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, \mathrm{d}x &= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \, \mathrm{d}x = \int |\cos x - \sin x| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní hledejme primitivní funkci zvlášť na intervalu $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x| \, \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + A_k$$

a na intervalu $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x| \, \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x) \, \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + B_k.$$

Abychom dostali primitivní funkci na celém intervalu $(0, \pi)$, musíme zajistit, aby v bodě $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ byla spojitá, tedy aby platilo

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + A_k = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + B_k$$

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

$$B_k = 2\sqrt{2} + A_k.$$

Volbou jedné z konstant A_k nebo B_k je tedy primitivní funkce jednoznačně určena. Naopak, jednu z těchto konstant můžeme volit zcela libovolně.

Je možné ověřit, že nalezená funkce je v bodě $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ je diferencovatelná (výpočtem derivace zleva a zprava pomocí limity) a derivace má správnou hodnotu. Není to ale nutné, protože máme Větu.

(g) $f(x) = |\sin x|$

(h) $f(x) = |\sin x + \cos x|$

(c) $f(x) = |\sin x|$

Řešení:

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, má také na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Tudíž má také primitivní funkci na všech otevřených podmnožinách $\mathbb{R}$ a tato primitivní funkce musí být ve všech bodech spojitá, neboť má ve všech bodech vlastní derivaci $|\sin x|$.

Nejprve určíme neurčitý integrál k f na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Protože

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\sin x & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

platí, že libovolná primitivní funkce k funkci f na $\mathbb{R}$ má tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \cos x + B_k & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. V bodech $2k\pi$ je potřeba zajistit, aby funkce F byla spojitá, a tudíž limita zleva byla rovna limitě zprava. Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned} -\cos x + A_k = \cos x + B_{k-1} \qquad &\text{pro } x = 2k\pi \implies -1 + A_k = 1 + B_{k-1} \\ &\implies A_k = 2 + B_{k-1} \\ -\cos x + A_k = \cos x + B_k \qquad &\text{pro } x = \pi + 2k\pi \implies 1 + A_k = -1 + B_k \\ &\implies B_k = A_k + 2 = 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že funkce F je jednoznačně určena volbou kterékoliv konstanty A_k nebo B_k pro jedno libovolně volené celé číslo k.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, \mathrm{d}x = \int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x$$

Nyní hledejme primitivní funkci zvlášť na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C_1$$

a na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x)\, \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C_2.$$

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. **Lepení primitivních funkcí.** Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení“* primitivních funkcí.

P ř í k l a d Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

■

P ř í k l a d Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

Uvažujme funkci F definovanou přepisem $F(x) = F_k(x)$ na každém I_k. Aby funkce F byla spojitá, musí platit

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4}+k\pi)_-} (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k = \sqrt{2} + c_k =$$
$$= \lim_{x\to(-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi)_+} (-1)^{k+1}(-\cos x + \sin x) + c_{k+1} = -\sqrt{2} + c_{k+1}$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Zvolíme tedy c_0 libovolné a $c_k = c_0 + 2k\sqrt{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Tím je určena spojitá funkce F na $\mathbb{R}$. Protože derivace funkce F konverguje k hodnotě (spojité) funkce $|\sin x + \cos x|$ pro x blížící se hodnotě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ zleva i zprava pro všechna celá k, jsou podle věty o limitě derivací a jednostranných derivacích limita zleva i zprava funkce F' rovny derivaci F v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ a ta je rovna hodnotě funkce $|\sin x + \cos x|$ v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pro všechna celá k. Proto je F primitivní funkcí k $|\sin x + \cos x|$ na celém $\mathbb{R}$. Přičtením libovolné konstanty můžeme docílit, že hodnota c_0 je libovolné reálné číslo.

Řešením tedy je, že

$$\int |\sin x + \cos x| \,\mathrm{d}x = F_0(x) + \mathbf{C},$$

kde $F_0(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$ pro $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ pro všechna k celá. ∎

Všimněte si, že v prvním z předchozích dvou příkladů jsme použili explicitně tvrzení o existenci primitivní funkce ke spojité funkci [I1, Věta 49], kdežto ve druhém jsme se bez toho obešli. Použili jsme ovšem jiné tvrzení (o limitě derivace a jednostranné derivaci [DII, Věta 80]). V obou případech si můžete rozmyslet, jak by vypadalo užití druhého z obou možných postupů.

§3. Derivace součinu a metoda per partes. Není příliš časté, aby funkce byla zapsána ve tvaru derivace součinu dvou funkcí jako v následujícím příkladu.

P ř í k l a d Spočtěte $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \Big((e^x)' \sin x + e^x(\sin x)'\Big)\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ∎

Mnohem častěji je možné vyjádřit si zadanou funkci jako součin derivace jedné funkce s funkcí druhou, tedy jen jako část vzorce pro derivaci součinu. To nám umožní použít *metodu per partes*, která spočívá v následujícím pozorování.

Je-li $G'(x) = g(x)$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak platí, že

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklady

(a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

Řešení: substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -2\frac{1}{t+1}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := -2\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1}$$

a to na intervalu $(-\pi;\pi)+2k\pi$, to je ze substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Dále máme podmínky, $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$. Také máme podmínky $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq -1$, které ale dávají stejnou podmínku na $x \neq -\pi/2$.

A jdeme lepit (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = 0$$

takže nemusíme funkce nijak posouvat a je třeba dodefinovat krajní body, udělat podmínky a připojit konstantu.

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1} + c & x \in (-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) \setminus \{-\pi/2+2k\pi\} \\ 0 + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

V bodech $-\pi/2$ nelepíme, primitivní funkce tam vůbec není definovaná a ani původní integrál tam nedává smysl.

Na závěr se ještě podíváme na substituci. Volili jsme $\varphi(t) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, tedy $\varphi^{-1}(x) = 2\arctan t$. Tedy φ je z $(-\pi,\pi)$ do $\mathbb{R}$, což nám zároveň dává intervaly, na nichž jsme získali primitivní funkci. (Nezapomene aplikovat podmínky, $t \neq -1$.)

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Řešení: Funkce f je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$, a tudíž k ní na $\mathbb{R}$ existuje primitivní funkce. K jejímu nalezení použijeme substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na každém z intervalů $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Podle transformačních vztahů máme, že na každém z intervalů I_k platí

$$\int \frac{1}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2}\,\mathrm{d}t == \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}\,dt \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$$

Můžeme tedy psát, že

$$F(x) = \int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_k, \qquad x \in I_k.$$

Zřejmě

$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k, \qquad \lim_{x\to(\pi+2\pi k)+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}.$$

Z požadavku spojitosti na funkci F v bodě $(\pi + 2\pi k)$ tedy vyplývá, že

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}$$

odkud ihned máme, že

$$C_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_k.$$

Tato podmínka volbou jedné libovolné z konstant C_k určuje všechny ostatní. Například indukcí lze lehko ukázat, že

$$C_k = \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pro funkci F tedy můžeme psát

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, & x \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k) \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}} + C_0, & x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

Protože víme, že $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$, z věty o limitě derivace díky spojitosti funkce f a F na $\mathbb{R}$ vyplývá, že $F'(x) = f(x)$ i ve styčných bodech jednotlivých intervalů, tedy na celém $\mathbb{R}$.

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x}$$

Řešení: Jako výše, $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$. Máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} =$$
$$\int \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

na intervalu (viz výše) $(-\pi,\pi)+2k\pi$

Lepení (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Tedy budeme posouvat o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ a dodefinujeme v krajních bodech pomocí právě zjištěných limit, přidáme konstantu.

Celkem máme:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x = \pi+2k\pi \end{cases}$$

Podmínky substituce jsou stejné, jako u prvního příkladu.

(d)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Funkce je sudá v obou proměnných, tedy $t=\tan x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Máme:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1+\frac{t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\,\mathrm{d}t =$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int\frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}t$$

Tedy

$$F(x) = \text{arctan tan } x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan } x$$

Tangens je definován na $(-\pi/2; \pi/2)$, tedy k lepení potřebujeme

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{-\pi}{2}+} F(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

Celkem:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \text{arctan tan } x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan } x + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c \\ \qquad x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Substituce byla $\varphi : \tan x = t$ je definována na $(-\pi/2; \pi/2)$ zobrazuje do $\mathbb{R}$.

(e)

$$\int \frac{1}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Funkce je definovaná (a spojitá) na intervalech $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$. Zároveň je sudá v obou proměnných, bude tedy vhodná substituce $t = \cot x$ (místo obvyklého tangens). Použijeme transformační vztahy

$$\mathrm{d}x = \frac{-1\,\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

a dostaneme

$$\int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)}\frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctan } (\sqrt{2}t) + c_k$$

Zasubstituujeme zpět a máme

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctan } (\sqrt{2}\cot x) + c_k$$

pro $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.
Funkce se při téhle substituci nelepí.

(f) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení:

Ilja Černý

str. 154, př. 9.11b

(g) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 155, př. 9.11c

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 139, př. 9.6

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2}$

Řešení:

Holicky Kalenda str. 25

Příklad 9.11b. Na rozdíl od příkladu 9.11a je funkce

$$f(x) := \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \tag{91}$$

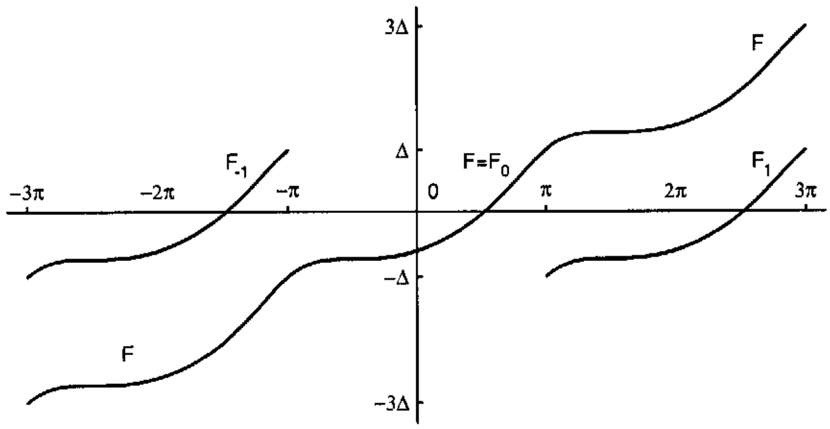
spojitá v celém $\mathbb{R}$. Aplikace 2SM s funkcí $\omega(t) = 2 \operatorname{arctg} t$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned} h(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{(1+t)^2}{3+t^2}\,\frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{3+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2} \\ &= \Big(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + \lg \frac{1+t^2}{3+t^2}\Big)' \end{aligned}$$

platným pro všechna $t \in \mathbb{R}$; funkce

$$F_0(x) := \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}\Big) + \lg \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} \tag{92}$$

je proto funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0.



K PŘÍKLADU 9.11B

Položme $F_0(\pi) := F_0(\pi-) = \pi/\sqrt{3}$; takto rozšířená funkce F_0 je spojitá v intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \quad I_k^* := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\rangle \tag{93}$$

a v I_k^* definujme funkci F_k podmínkou $F_k(x) := F_0(x - 2k\pi)$. (Protože funkce F_0 je 2π-periodická, je $F_k(x)$ v I_k rovno pravé straně rovnosti (92) a $F_k((2k+1)\pi) := \pi/\sqrt{3}$.) Funkce F_k je spojitá v I_k^* a zároveň je funkcí primitivní k f v I_k. Položíme-li

$$\Delta := F_k((2k+1)\pi) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi) - F_0(-\pi+) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi, \tag{94}$$

je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad I_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11c. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \tag{96}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$ a funkci k ní primitivní (v $\mathbb{R}$) lze najít pomocí 1SM: V intervalech $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz $\cos^2 x$ a $f(x)$ upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 4)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 4)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,; \tag{96'}$$

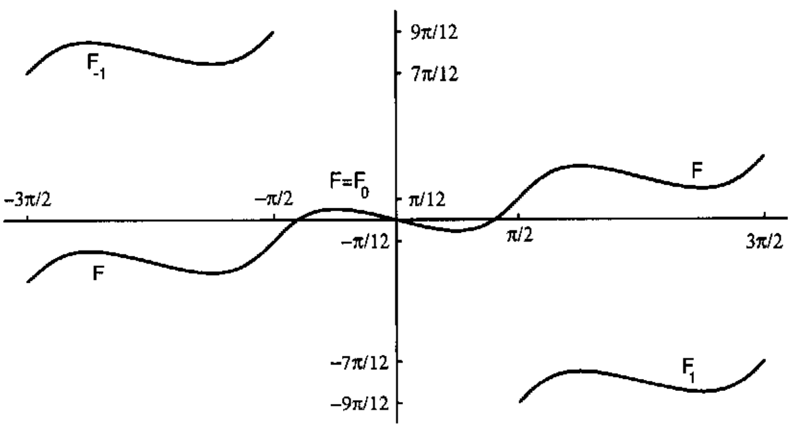
pak v 1SM položíme $\operatorname{tg} x = y$. Protože rovnosti

$$g(y) := \frac{y^2 - 1}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{y^2+4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^2+1} = \left(\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} y\right)'$$

platí všude v $\mathbb{R}$, je funkce

$$F_k(x) := \tfrac{5}{6}\operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x) - \tfrac{2}{3}x \tag{97}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v K_k.



K PŘÍKLADU 9.11C

Funkci F_k rozšíříme spojitě na interval $K_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$ tím, že položíme $F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi) := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) := \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$; protože $F_{k+1}(\frac{1}{2}(2k+1)\pi+) = -\frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$, je

$$\Delta := F_k(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) - F_{k+1}(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi+) = \tfrac{5}{6}\pi$$

a funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \ \text{ v } \ K_k^* \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{Z} \tag{98}$$

je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11d. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)(2\sin^2 x - 1)} \tag{99}$$

má primitivní funkce v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod x, v němž je buď $\cos x = \frac{1}{2}$, nebo $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maximálními intervaly s touto vlastností jsou intervaly

$$\begin{aligned} A_k &: = (2k\pi - \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi), & B_k &: = (2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi), \\ C_k &: = (2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi), & D_k &: = (2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi), \\ E_k &: = (2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi), & F_k &: = (2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{3}\pi), \end{aligned} \tag{100}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. V každém z nich napíšeme $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = \frac{-\sin x}{(2\cos x - 1)(2\cos^2 x - 1)}, \tag{99'}$$

položíme $\cos x = y$ a aplikujeme 1SM. Zbývá najít primitivní funkci funkce

$$g(y) := \frac{1}{(2y-1)(2y^2-1)} \tag{101}$$

v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Čtenář snadno ověří, že identita

$$g(y) = \frac{a}{2y-1} + \frac{b}{\sqrt{2}y - 1} + \frac{c}{\sqrt{2}y+1}, \tag{102}$$

kde

$$a = -2, \ b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1), \ c = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \tag{103}$$

je rozkladem $g(y)$ na jednoduché zlomky. Funkce

$$G(y) := -\lg|2y-1| + \frac{b}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}y - 1| + \frac{c}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}y+1|, \tag{104}$$

Příklad 9.5. Funkce $f(x) := 1/\sqrt{e^x - 1}$ má podle V.9.2 primitivní funkci v $\mathbb{R}_+$. Položme $\sqrt{e^x - 1} = t$, tj. substituujme $x = \omega(t) := \lg(t^2+1)$. Všechny předpoklady 2SM jsou splněny, protože $\omega'(t) = 2t/(t^2+1) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$ a $\omega(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Protože

$$f(\omega(t))\omega'(t) = \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1} = (2\operatorname{arctg} t)' \text{ v } \mathbb{R}_+,$$

je $F(x) := 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}$ funkcí primitivní k $f(x)$ v $\mathbb{R}_+$.

Příklad 9.6. Funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \tag{18}$$

má podle V.9.2 primitivní funkci v celém $\mathbb{R}$, ale najít ji bude poněkud komplikovanější, protože standardní substituci $\operatorname{tg} x = y$ (sr. s příkladem 9.11) lze provést jen v intervalech, které neobsahují žádný bod tvaru $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pracujme v intervalech $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a upravme (18) na tvar

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + 2}; \tag{18*}$$

podle 1SM (s $\omega(x) = \operatorname{tg} x$) a podle (4) platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\frac{1}{y^2+2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)' \text{ v } \mathbb{R}, \text{ takže } f(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big)' \text{ v } I_k.$$

Funkce F_k definovaná v intervalu $I_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ podmínkami

$$F_k(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} & \text{pro všechna } x \in I_k \\ F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi \end{cases} \tag{19}$$

je spojitá v I_k^*, protože se její hodnota v koncovém bodě intervalu I_k rovná příslušné limitě zleva. Protože číslo $\Delta := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) - F_k(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = \pi/\sqrt{2}$ nezávisí na k, je funkce F definovaná podmínkami

$$F(x) := F_k(x) + k\Delta \text{ pro všechna } x \in I_k^* \text{ a všechna } k \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

zřejmě spojitá v celém $\mathbb{R}$; je přitom funkcí primitivní k f v každém intervalu I_k. Podle V.5.5 a vzhledem ke spojitosti f v $\mathbb{R}$ je kromě toho

$$F'(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} F'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} f(x) = f(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi),$$

což dokazuje, že F je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

a to na maximálních intervalech $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Poznámka. Mohli jsme se též vyhnout rozkládání intervalu J_k na intervaly J_k^-, J_k^+ a bod $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kdybychom pro interval J_k užili substituci $\operatorname{cotg} x$. Doporučujeme rozmyslet si to podrobně.

Předchozí příklad s poznámkou jsou ilustrací následující obecnější poučky.

Pokud je $R(u,v) = R(-u,-v)$, lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ vyjádřit ve tvaru $Q(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce tg *není definována) a také ve tvaru $S(\operatorname{cotg} x) \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce* cotg *není definována), kde Q a S jsou racionální funkce. Substitucí „$y = \operatorname{tg} x$“ či „$y = \operatorname{cotg} x$“ lze tedy převést úlohu hledání primitivní funkce k funkci $R(\sin x, \cos x)$ na hledání primitivní funkce k funkci racionální.*

Protože tyto substituce mohou být aplikovány jen na intervalech definičního oboru funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$, může tento postup vyžadovat dodatečné „lepení“. Vhodnou volbou substituce se mu lze někdy vyhnout.

Následující poučka popisuje substituci, která je univerzálně použitelná pro všechny funkce typu „$R(\sin x, \cos x)$“.

Užití substituce „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“ či „$y = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$“ vede vždy k hledání primitivních funkcí k racionálním funkcím na intervalech, kde lze aplikovat substituční větu.

Rozmyslete si, v čem by byla v předchozích příkladech aplikace těchto substitucí komplikovanější. Doporučujeme si to cvičně provést.

My budeme použití právě uvedených substitucí demonstrovat na vhodnějším příkladu.

Příklad Najděte všechny primitivní funkce k funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$.

Řešení. Protože funkce není ve tvaru vhodném k aplikaci substitucí „$y = \sin x$“, „$y = \cos x$“, „$y = \operatorname{tg} x$“ ani „$y = \operatorname{cotg} x$“, budeme aplikovat substituci „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“.

Povšimněme si už nyní, že h je spojitá na $\mathbb{R}$, takže k nalezení primitivní funkce na $\mathbb{R}$ zvolenou metodou bude jistě na závěr zapotřebí (nekonečně mnoha) lepení.

Je $h(x) = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x + 2} (\operatorname{tg} \frac{x}{2})'$ na intervalech $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom vyjádřili h v potřebném tvaru pro použití 1. substituční věty s $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ uvážíme, že

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

a

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

na I_k. Po dosazení dostaneme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y+y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}y}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} z + \mathrm{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{C}$$

na intervalu I_k pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce H k funkci h na $\mathbb{R}$ je tedy rovna $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_k$ na I_k. Protože je spojitá na $\mathbb{R}$ a platí rovnosti

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)_-} H(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{x\to(\pi+2k\pi)_+} H(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Zvolíme-li např. c_0 libovolně, je H určena jednoznačně.

Konečně tedy máme, že všechny primitivní funkce k h na $\mathbb{R}$ jsou tvaru

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$$

pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $H(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, kde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Poznámka. Pro řešení předchozího příkladu jsme mohli též užít 2. větu o substituci se substitucí „$x = 2\operatorname{arctg} y$" pro $y \in (-\infty, \infty)$, která odpovídá v jistém smyslu právě užité substituci „$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$". Tím bychom našli primitivní funkci H_0 k zadané funkci h na intervalu $(-\pi, \pi)$. Vzhledem k tomu, že h je 2π-periodická, můžeme pak na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ uvažovat funkce $H_k(x) = H_0(x - 2k\pi) + c_k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, které mají na příslušných intervalech zřejmě derivaci rovnou h. Pak už můžeme postupovat jako v předchozím a spojitým dodefinováním H v krajních bodech intervalů (tedy metodou „lepení") najít primitivní funkci H k h na celém $\mathbb{R}$.

Úvahu o periodičnosti lze ovšem užít častěji. V řešení předchozího příkladu jsme též mohli užít 1. větu o substituci na substituci „$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$" jen na intervalu $(-\pi, \pi)$ a využít periodičnosti tak, jak bylo právě naznačeno.

§7. Další často používané substituce. Domníváme se, že v předchozích odstavcích jsme předvedli všechny podstatné metody užívané při řešení úloh na hledání primitivních funkcí. Nevyčerpali jsme ovšem zdaleka všechny příklady důležitých substitucí, které je třeba ovládat. Zmíníme se nyní již jen stručně o některých z nich. Doporučujeme najít příslušné primitivní funkce v následujících příkladech, ve kterých předvedeme jen část celého postupu.